

Uśrednianie prognoz jako sposób na zmniejszenie ryzyka związanego z podejmowaniem decyzji w przedsiębiorstwie energetycznym

Jakub Nowotarski

Promotor: prof. dr hab. Rafał Weron

Promotor pomocniczy: dr Katarzyna Maciejowska

Katedra Badań Operacyjnych, Finansów i Zastosowań Informatyki
Wydział Informatyki i Zarządzania, Politechnika Wrocławska

- 2008-2011 Lic. z Matematyki, PWR
- 2011-2013 Mgr z Matematyki Finansowej i Ubezpieczeniowej, PWR
 - **Nagroda rektora** za szczególne wyniki w nauce
 - **Stypendium motywacyjne** Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego (MNiSW)
 - Uczestnictwo w 11 warsztatach z modelowania matematycznego (*ECMI Modeling Week, European Study Group with Industry*)
 - W 2012 zapytał, czy może uczestniczyć w ‘prawdziwym projekcie naukowym’
 - W 2013 pierwszy artykuł w *Energy Economics*

- 2013-2017 doktorat z Zarządzania, PWR
 - **Grant PRELUDIUM**, Narodowe Centrum Nauki, 07/2014
 - **Najlepsza publikacja i prezentacja spośród doktorantów**, *Conference on Energy Finance (EF14)*, Erice, Włochy, 09/2014
 - **2. miejsce** w konkursie *Global Energy Forecasting Competition – GEFCom2014*, 07/2015
 - **Stypendium Wincentego Stysia** z nauk społecznych i humanistycznych, przyznane przez prezydenta Wrocławia, 09/2015-06/2016
 - **Stypendium ministra dla doktorantów**, MNiSW, 12/2016
⇒ **jedyny student nauk ekonomicznych!**

- 2013-2017 doktorat z Zarządzania, PWR
 - **Prezentował wyniki na 17 konferencjach** w Europie i USA
 - *Conference on Energy Finance* (2014, 2015, 2016)
 - *IEEE PES (Power & Energy Society) General Meeting* (2015)
 - *International Symposium on Forecasting* (2015, 2016)
 - 16 publikacji
 - 12 z prognozowania na rynkach energii
 - **13 na tzw. liście filadelfijskiej (LF)**
 - **50 cytowań wg. bazy Scopus** (bez autocytowań), H-index = 5
- Obecnie pracuje w zespole *Model Risk Management Group* w BNY Mellon, Wrocław

Uśrednianie prognoz jako sposób na zmniejszenie ryzyka związanego z podejmowaniem decyzji w przedsiębiorstwie energetycznym

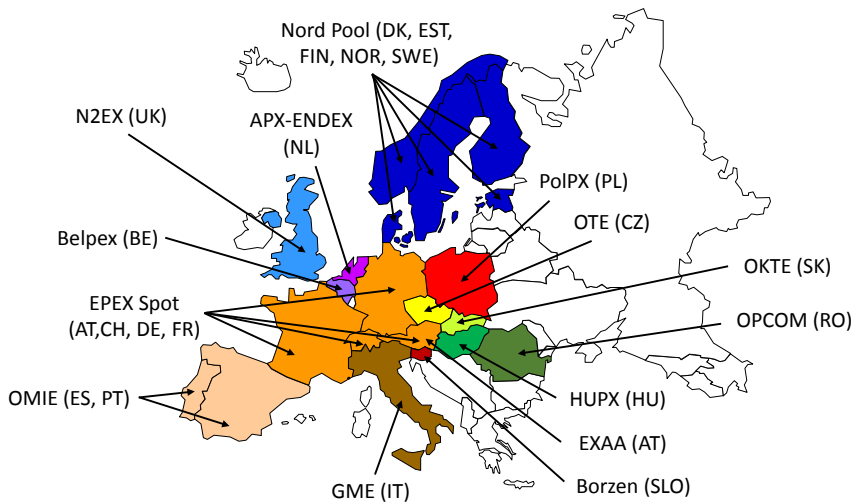
Jakub Nowotarski

Promotor: prof. dr hab. Rafał Weron

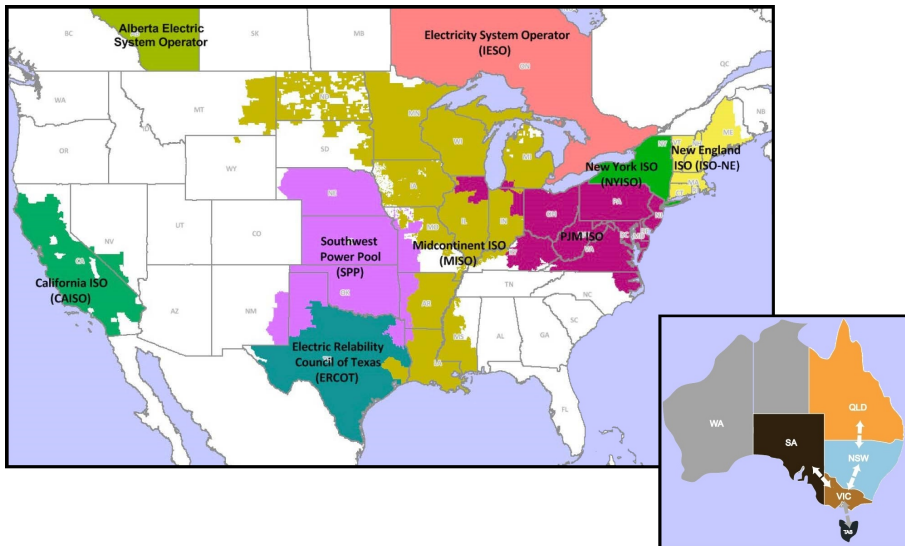
Promotor pomocniczy: dr Katarzyna Maciejowska

Katedra Badań Operacyjnych, Finansów i Zastosowań Informatyki
Wydział Informatyki i Zarządzania, Politechnika Wrocławska

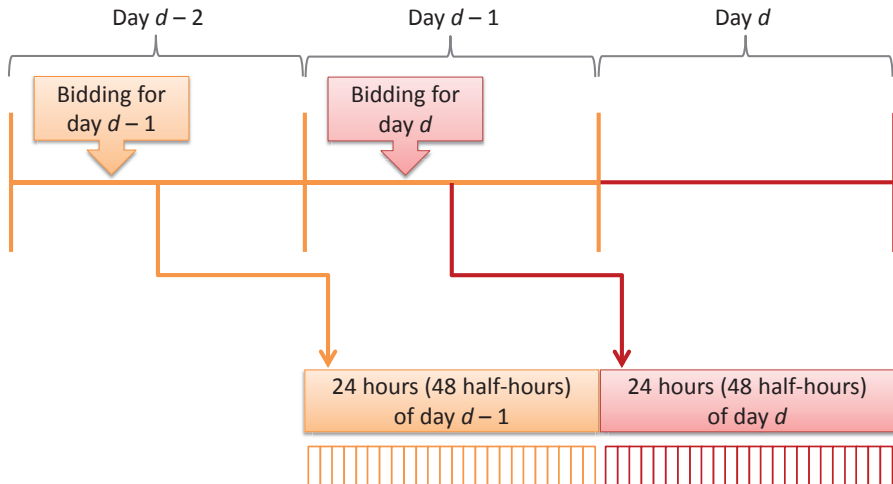
Rynki energii elektrycznej (REE) w Europie



... w Ameryce Północnej i Australii



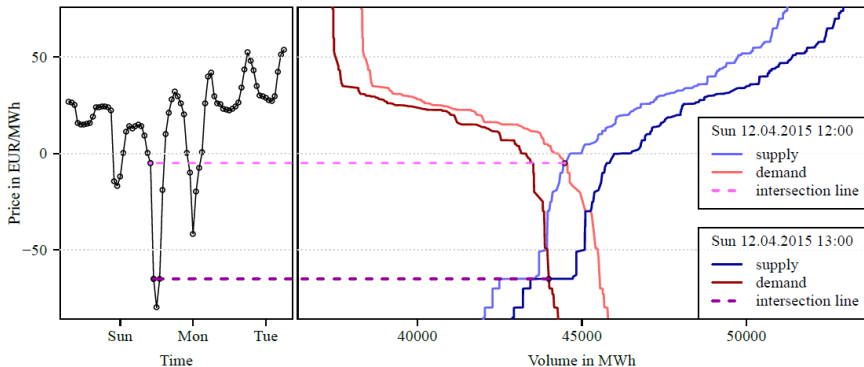
Rynek dnia następnego (RDN) i cena 'spotowa'



Źródło: Weron (2014, Int. J. Forecasting)

Kształtowanie się cen spotowych

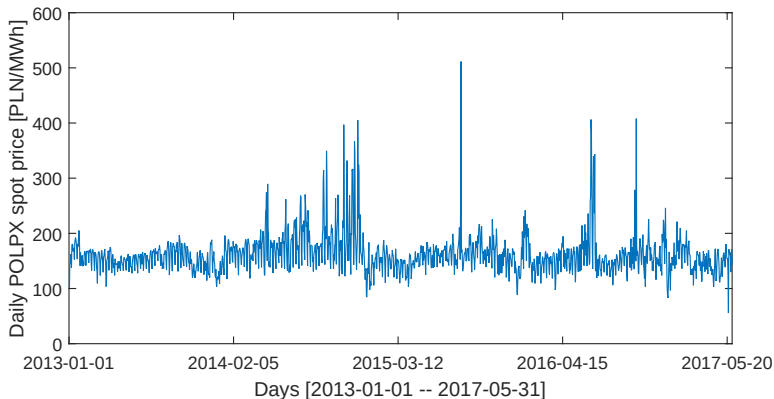
Podaż i popyt, źródła odnawialne i ujemne ceny



Źródło: Ziel & Steinert (2016, Energy Economics)

Szereg czasowy cen energii elektrycznej

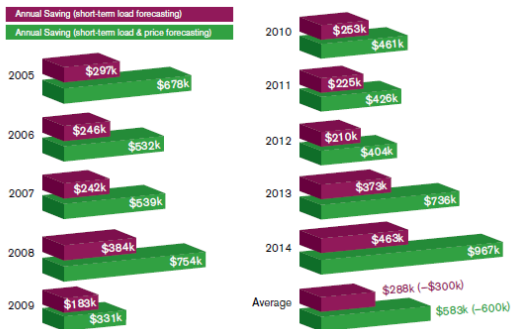
Sezonowość, powracanie do średniej i piki cenowe (*spikes*)



Dlaczego prognozowanie na REE jest tak ważne?

- Błąd prognozy cen i zapotrzebowania mniejszy o 1% → oszczędności rzędu \$600 tys. (przy 1 GW mocy zainstalowanej)

$$\text{Oszczędności} = \text{Zapotrzebowanie} \cdot \left(\underbrace{P_{d,h}^{DA}}_{\text{bez prognoz}} - \underbrace{\min(P_{d,h}^{DA}, P_{d,h}^{RT})}_{\text{wiemy, czy DA > RT}} \right)$$



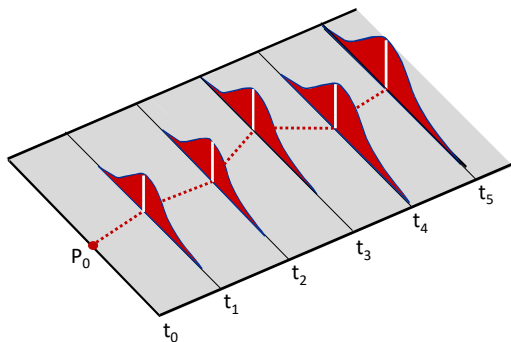
Źródło: Hong (2015, EnergyBiz)

Nowe trendy na REE: Uśrednianie prognoz

- Uśrednianie prognoz to pomysł z lat 1960-tych (Bates & Granger, 1969; Crane & Crotty, 1967)
- Na REE
 - Prognozowanie zapotrzebowania na energię elektryczną – od połowy lat 1980-tych (Bunn, 1985; Bunn & Farmer, 1985; Smith, 1989), stosowane również współcześnie (Loland et al., 2012; Taylor, 2010; Taylor & Majithia, 2000)
 - Dopiero w 2013 roku pojawiły się pierwsze artykuły nt. prognozowania cen energii elektrycznej: Bordignon et al. (2013), Nowotarski et al. (2014), Weron (2014), Raviv et al. (2015)

Nowe trendy na REE: Prognozy probabilistyczne

- Prognozy przedziałowe (*prediction intervals*) czy gęstości rozkładu (*density forecasts*) niosą dużo więcej informacji, które menadżerowie mogą wykorzystać w planowaniu i podejmowaniu decyzji (Chatfield, 2000; Gneiting & Katzfuss, 2014)



Cel i zadania

Cel: Rozwinięcie skutecznych i odpornych narzędzi prognozowania cen spotowych energii elektrycznej

Zadania:

- 1 Weryfikacja, czy uśrednianie poprawia jakość prognoz **[P1, P2-P3]**
- 2 Opracowanie metod pozwalających wykorzystać prognozy punktowe do wyznaczania prognoz przedziałowych **[P2, P3-P4]**
- 3 Opracowanie wytycznych co do stosowania poszczególnych metod, miar błędów i testów w kontekście prognozowania probabilistycznego na REE **[P5]**

[P1] Uśrednianie prognoz (prognozy punktowe)



[P1]

Contents lists available at ScienceDirect

Energy Economics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/eneco

An empirical comparison of alternative schemes for combining electricity spot price forecasts

Jakub Nowotarski^a, Eran Raviv^b, Stefan Trück^c, Rafał Weron^{a,*}^a Institute of Organization and Management, Wrocław University of Technology, Wrocław, Poland^b Department of Econometrics, Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands^c Faculty of Business and Economics, Macquarie University, Sydney, Australia

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 August 2013

Received in revised form 14 May 2014

Accepted 19 July 2014

Available online 31 July 2014

JEL Codes:

C22 Time-Series Models

C52 Model Evaluation, Validation, and Selection

C53 Forecasting and Prediction Methods

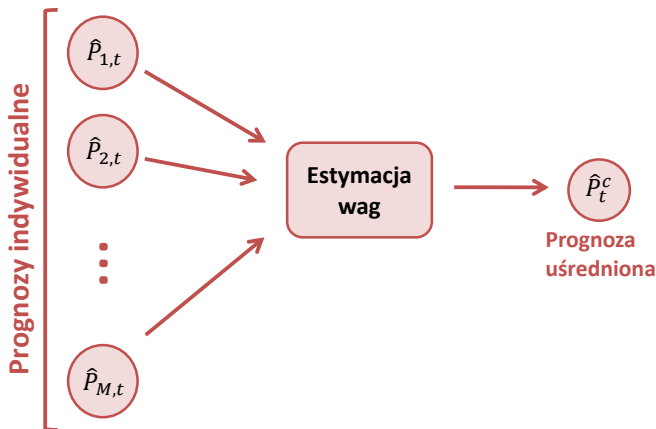
L94 Electric Utilities

Q47 Energy Forecasting

ABSTRACT

In this comprehensive empirical study we critically evaluate the use of forecast averaging in the context of electricity prices. We apply seven averaging and one selection scheme and perform a backtesting analysis on day-ahead electricity prices in three major European and US markets. Our findings support the additional benefit of combining forecasts of individual methods for deriving more accurate predictions, however, the performance is not uniform across the considered markets and periods. In particular, equally weighted pooling of forecasts emerges as a simple, yet powerful technique compared with other schemes that rely on estimated combination weights, but only when there is no individual predictor that consistently outperforms its competitors. Constrained least squares regression (CLS) offers a balance between robustness against such well performing individual methods and relatively accurate forecasts, on average better than those of the individual predictors. Finally, some popular forecast averaging schemes – like ordinary least squares regression (OLS) and Bayesian Model Averaging (BMA) – turn out to be unsuitable for predicting day-ahead electricity prices.

[P1] Na czym polega uśrednianie prognoz punktowych?



[P1] Wyniki

- Empiryczny 'dowód', że uśrednianie prognoz działa dla cen energii elektrycznej
- Przewaga uśredniania istotna statystycznie (test Diebolda-Mariano)

Nord Pool, 2010

Week	Simple	OLS	LAD	PW	CLS	IRMSE	BMA	BI	ARX
<i>Summary statistics</i>									
WMAE	8.25	9.58	7.80	8.58	8.57	8.26	9.54	8.50	9.42
# better than AR	27	17	26	19	27	27	17	22	—
# better than BI	15	8	21	14	14	15	8	—	—
# best	1	2	13	5	1	4	0	4	—
m.d.f.b.	1.07	2.40	0.62	1.39	1.39	1.07	2.36	1.31	2.24

[P2-4] Uśrednianie prognoz (prognozy probabilistyczne)

Comput Stat (2015) 30:791–803
DOI 10.1007/s00180-014-0523-0



ORIGINAL PAPER

[P2] Computing electricity spot price prediction intervals using quantile regression and forecast averaging

Jakub Nowotarski · Rafał Weron

Abstract We examine possible accuracy gains from forecast averaging in the context of interval forecasts of electricity spot prices. First, we test whether constructing empirical prediction intervals (PI) from combined electricity spot price forecasts leads



Contents lists available at ScienceDirect

[P3] International Journal of Forecasting

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijforecast



Probabilistic forecasting of electricity spot prices using Factor Quantile Regression Averaging



Katarzyna Maciejowska^{a,b}, Jakub Nowotarski^a, Rafał Weron^{a,*}

^a Department of Operations Research, Wrocław University of Technology, Wrocław, Poland
^b CERGE-EI, Prague, Czech Republic

ARTICLE INFO

Keywords:
Probabilistic forecasting
Prediction interval
Quantile regression
Factor model
Forecasts combination
Electricity spot price

ABSTRACT

We examine possible accuracy gains from using factor models, quantile regression and forecast averaging to compute interval forecasts of electricity spot prices. We extend the Quantile Regression Averaging (QRA) approach of Nowotarski and Weron (2014a), and use principal component analysis to automate the process of selecting from among a large set of individual forecasting models that are available for averaging. We show that the resulting Factor Quantile Regression Averaging (FQRA) approach performs very well for price (and load) data from the British power market. In terms of unconditional coverage, conditional coverage and the Winkler score, we find the FQRA-implied prediction intervals to be more accurate than those of either the benchmark ARX model or the QRA approach.
© 2014 International Institute of Forecasters. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.



Contents lists available at ScienceDirect

[P4] International Journal of Forecasting

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijforecast



A hybrid model for GEFCom2014 probabilistic electricity price forecasting



Katarzyna Maciejowska^{a,b,*}, Jakub Nowotarski^{a,c}

^a Department of Operations Research, Wrocław University of Technology, Wrocław, Poland
^b CERGE-EI, Prague, Czech Republic
^c Energy Production and Infrastructure Center, University of North Carolina at Charlotte, USA

ARTICLE INFO

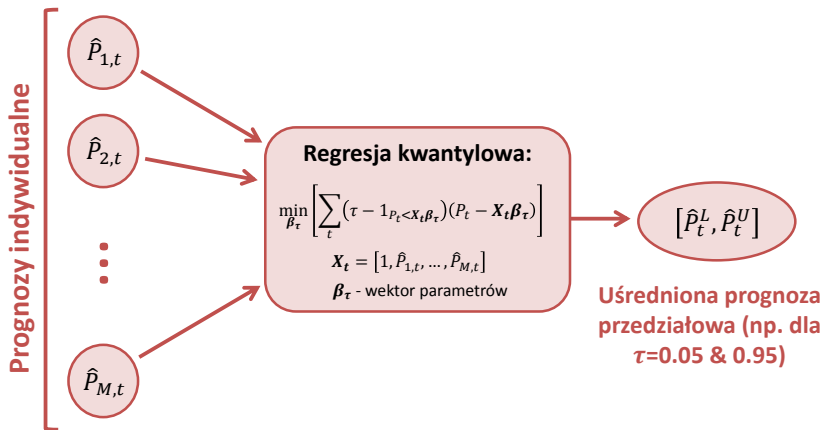
Keywords:
Probabilistic forecasting
Hybrid model
Quantile regression
Electricity spot price
Forecasts combination
Pinball function

ABSTRACT

This paper provides detailed information on Team Poland's winning methodology in the electricity price forecasting track of GEFCom2014. A new hybrid model extending the Quantile Regression Averaging (QRA) approach of Nowotarski and Weron (2015) is proposed. It consists of four major blocks: point forecasting, pre-filtering, quantile regression modeling and post-processing. This universal model structure enables a single block to be developed independently, without the performances of the remaining blocks being affected. The four-block model design is complemented by the inclusion of expert judgement, which may be of great importance in periods of unusually high or low electricity demand.
© 2015 International Institute of Forecasters. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.

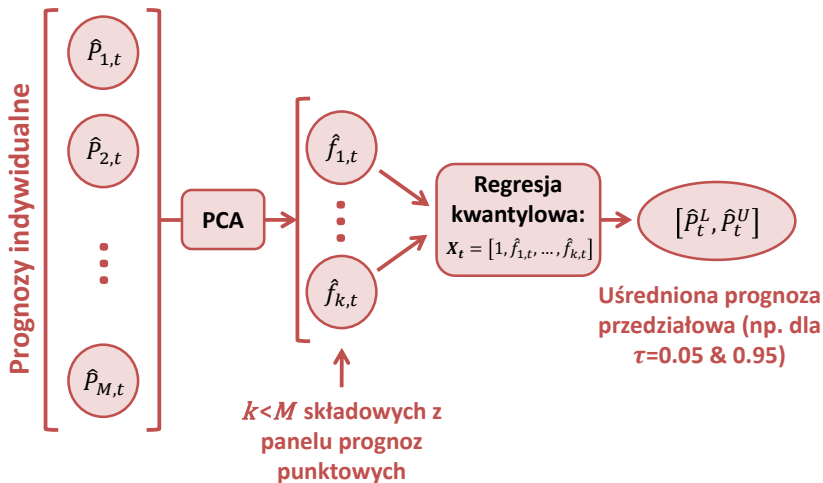
[P2] Quantile Regression Averaging (QRA)

Wykorzystanie prognoz punktowych do wyznaczenia prognoz przedziałowych



[P3] Factor QRA (FQRA)

QRA dla dużej liczby prognoz indywidualnych



[P4] QRA w GEFCOM2014

1-sze i 2-gie miejsce dla QRA!



[P5] Wytyczne co do stosowania poszczególnych metod, miar błędów i testów na REE



Contents lists available at ScienceDirect

[P5] Renewable and Sustainable Energy Reviews

journal homepage: www.elsevier.com/locate/rser

Recent advances in electricity price forecasting: A review of probabilistic forecasting

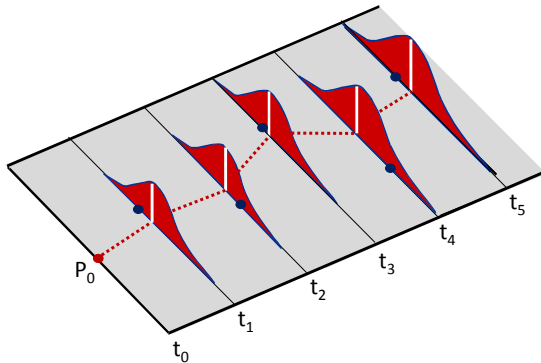
Jakub Nowotarski^a, Rafał Weron^a^aDepartment of Operations Research, Wrocław University of Science and Technology, 50-370 Wrocław, Poland

Abstract

Since the inception of competitive power markets two decades ago, *electricity price forecasting* (EPF) has gradually become a fundamental process for energy companies' decision making mechanisms. Over the years, the bulk of research has concerned point predictions. However, the recent introduction of smart grids and renewable integration requirements has had the effect of increasing the uncertainty of future supply, demand and prices. Academics and practitioners alike have come to understand that probabilistic electricity price (and load) forecasting is now more important for energy systems planning and operations than ever before. With this paper we offer a tutorial review of probabilistic EPF and present much needed guidelines for the rigorous use of methods, measures and tests, in line with the paradigm of 'maximizing sharpness subject to reliability'. The paper can be treated as an update and a further extension of the otherwise comprehensive EPF review of Weron [1] or as a standalone treatment of a fascinating and underdeveloped topic, that has a much broader reach than EPF itself.

[P5] Ocena jakości prognoz probabilistycznych

- Nietrywialne zagadnienie do ewaluacji – prognozujemy rozkład, obserwujemy tylko jedną wartość



[P5] Ocena jakości prognoz probabilistycznych

- Kompleksowa analiza metod wraz ze wskazaniem najlepszych
- Badanie empiryczne z ich wykorzystaniem

Interval forecasts Statistics	Tests	Density forecasts Statistics	Tests
<i>Reliability / calibration / unbiasedness</i>			
Unconditional coverage 46 74	Kupiec 74	Probability Integral Transform (PIT) 14 75	Visual 'tests' 14 16 Tests for uniformity 76 77
Conditional coverage 46 (CC = UC + Independence)	Christoffersen 46 (Lagged 78) Ljung-Box Christoffersen 79 Duration-based tests 80 81 Dynamic Quantile (DQ) 82 VQR 83	Berkowitz CC statistic 48	Berkowitz 48
<i>Sharpness (and reliability)</i>			
Pinball loss 84 85	Diebold-Mariano 87 88	Continuous Ranked Probability Score (CRPS) 15 91	Diebold-Mariano 87 88
Winkler (interval) score 86	Model confidence set 89 Forecast encompassing 90	Logarithmic score 92	Model confidence set 89 Forecast encompassing 90

Najważniejsze wyniki

- 1 Uśrednianie prognoz dokładniejsze i mniej ryzykowne niż wybór modelu ex-ante **[P1, P2-P3]**
- 2 Quantile Regression Averaging (QRA) – **nowa, niezwykle skuteczna metoda** do prognozowania probabilistycznego, łączy uśrednianie prognoz i regresję kwantylową **[P2, P3-P4]**
- 3 Oryginalny zestaw wytycznych co do stosowania prognoz probabilistycznych na REE (i nie tylko) **[P5]**

Publikacje

- ❶ **J. Nowotarski**, E. Raviv, S. Trück, R. Weron (2014) *An empirical comparison of alternate schemes for combining electricity spot price forecasts*, Energy Economics 46, 395-412, [IF_{5Y}=3.574, 40p MNiSW]
 - ❷ **J. Nowotarski**, R. Weron (2015) *Computing electricity spot price prediction intervals using quantile regression and forecast averaging*, Computational Statistics 30(3), 791-803, [IF_{5Y}=0.560, 15p MNiSW]
 - ❸ K. Maciejowska, **J. Nowotarski**, R. Weron (2014) *Probabilistic forecasting of electricity spot prices*, International Journal of Forecasting 32, 957-965, [IF_{5Y}=1.994, 30p MNiSW]
 - ❹ K. Maciejowska, **J. Nowotarski** (2016), *A hybrid model for GEFCom2014 probabilistic electricity price forecasting*, International Journal of Forecasting 32 (3), 1051-1056, [IF_{5Y}=1.994, 30p MNiSW]
 - ❺ **J. Nowotarski**, R. Weron (2017), *Recent advances in electricity price forecasting: A review of probabilistic forecasting*, Renewable & Sustainable Energy Reviews, w druku, [IF_{5Y}=7.896, 45p MNiSW]
- Dalsze 9 prac z tej tematyki (w tym 5 artykułów na *liście filadelfijskiej*, LF)
 - Oraz 3 artykuły na LF dot. stosowania metod statystycznych w medycynie

Odpowiedzi na recenzje

1. Wartość dodana dla podejmowania decyzji

- Prognozy cen energii elektrycznej używane jako dane wejściowe do modeli optymalizacyjnych (Conejo et al., 2010; Shahidehpour et al., 2002):
 - Rynek dnia następnego i rynek bilansujący – strategia ofertowania (arbitraż)
 - Strategia ofertowania dla producenta energii z wiatru (dodatkowa niepewność związana z prognozowaniem wiatru)
 - Zarządzanie ryzykiem dla producenta energii z wiatru z uwzględnieniem miar ryzyka
- Dokładniejsze dane wejściowe poprawiają jakość modeli optymalizacyjnych

Bibliografia:

Conejo et al. (2010) *Decision Making Under Uncertainty in Electricity Markets*, Springer
Shahidehpour et al. (2002) *Market operations in electric power systems*, Wiley

2. Aspekt finansowy prognozowania cen EE

- **Hong (2015)**: szacunkowe wyliczenia – zakładamy, że wiemy czy $DA > RT \Rightarrow$ Roczne oszczędności rzędu \$600.000 dla przedsiębiorstwa o 1GW mocy zainstalowanej
- **Zareipour et al. (2010)**: względna różnica kosztów przy optymalizacji z prawdziwymi i prognozowanymi cenami
 - Nawet do 0.35% redukcji kosztu na każdy 1% błędu MAPE
 - Bazuje na *Forecast Inaccuracy Economic Impact*:

$$\frac{\text{Koszt}(\text{Cena prognozowana}) - \text{Koszt}(\text{Cena obserwowana})}{\text{Koszt}(\text{Cena prognozowana})} \cdot 100\%$$

Bibliografia:

Hong (2015) *Crystal ball lessons in predictive analytics*, EnergyBiz Magazine

Zareipour et al. (2010) *Economic impact of electricity market price forecasting errors: A demand-side analysis*, IEEE Transactions on Power Systems

2. Aspekt finansowy prognozowania cen EE cd.

- Boomsmaa et al. (2014): 14% zysku przy prognozowaniu i konkretnej optymalizacji

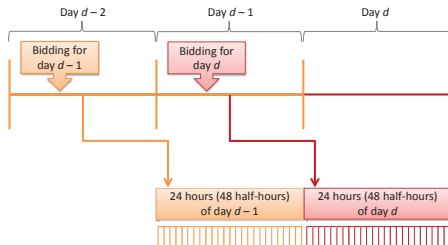
	Spot price (Euro/ megawatt hour)	Bal. price (Euro/ megawatt hour)	Up-reg. price (Euro)	Down-reg. price (Euro)	Profit, spot (Euro)	Profit, sep. (Euro)	Profit, cor. (Euro)	Gain, pct. (%)
January	50.83 (18.89)	42.80 (23.60)	18.44	24.36	7888.43	8083.54	9715.40	20.19
February	37.81 (17.48)	32.81 (23.20)	18.87	13.93	6804.23	8149.27	8149.27	14.71
March	30.53 (18.09)	23.28 (22.61)	13.22	10.06	6275.98	6580.84	8208.51	24.73
April	49.81 (16.98)	42.12 (22.47)	19.00	23.11	7784.69	8054.00	9517.38	18.17
May	40.02 (17.18)	35.30 (21.71)	19.45	15.85	6969.11	7227.26	8269.78	14.42
June	52.71 (18.39)	48.97 (22.65)	25.50	23.46	8064.44	8205.15	9016.59	9.89
July	45.09 (16.25)	41.24 (22.36)	23.20	18.04	7378.47	7593.78	8374.49	10.28
August	40.20 (16.22)	35.79 (22.10)	20.45	15.34	6968.93	7323.68	8175.58	11.63
September	47.65 (15.10)	42.76 (20.43)	21.88	20.89	7587.45	7711.59	8782.73	13.89
October	54.37 (17.43)	50.15 (22.17)	25.37	24.78	8190.54	8322.00	9247.50	11.12
November	58.64 (16.62)	54.11 (22.37)	27.55	26.56	8578.88	8681.39	9647.77	11.13
December	72.27 (21.22)	68.05 (25.83)	32.40	35.65	9831.01	9974.00	10774.91	8.03

Bibliografia:

Boomsmaa et al. (2014) *Bidding in sequential electricity markets: The Nordic case*, European Journal of Operational Research

3. W którym momencie prognozujemy?

- Większość zbiorów danych zakłada prognozy na 12-36 godzin do przodu
- Źródło danych GEFCom2014 nieujawnione
- Zmienne zewnętrzne: prawdziwe temperatury, prognozowane temperatury, prognozowane zapotrzebowanie
- Przyczyna: kompromis pomiędzy złożonością i dostępnością danych



4. Prostota metod indywidualnych

- Liniowa zależność może nie opisywać prawdziwej zależności między zmiennymi
- Diagnostyka jest skomplikowana, bo rozważamy wiele zmiennych
- Sieci neuronowe, które zakładają zależności nieliniowe, nie są dokładniejsze niż ARX (Marcjasz et al., 2017)

$$p_{d,h} = \underbrace{\beta_{h,1}p_{d-1,h} + \beta_{h,2}p_{d-2,h} + \beta_{h,3}p_{d-7,h}}_{\text{autoregressive effects}} + \underbrace{\beta_{h,4}p_{d-1,\min}}_{\text{non-linear effect}} + \beta_{h,5}z_t + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \beta_{h,i+5}D_i}_{\text{weekday dummies}} + \varepsilon_{d,h}$$

GEFCom2014		
Benchmarks		
Naïve	ARX	ANN ₅
14.716	11.232	11.214

Nord Pool		
Benchmarks		
Naïve	ARX	ANN ₅
9.661	8.500	8.509

Bibliografia:

Marcjasz et al. (2017) *Importance of the long-term seasonal component in day-ahead electricity price forecasting revisited: Statistical vs. neural network models*, Working Paper

1. Czy należy odwoływać się do ryzyka w tytule?

- Alternatywne tytuły również odzwierciedlają treść rozprawy
- Timmermann (2006): “[w prognozowaniu] niepewność jest odzwierciedlona w błędzie prognozy a źródło ryzyka dotyczy niepełnej informacji o obserwowanej zmiennej”
- Bunn (1985): Uśrednianie prognoz zmniejsza ryzyko (wariancję)

Bibliografia:

Timmermann (2006) *Forecast combinations*, Handbook of Economic Forecasting

Bunn (1985) *Statistical efficiency in the linear combination of forecasts*, Int. J. Forecasting

2. Właściwości szeregu czasowego, które wpływają na skuteczne prognozowanie

- Hyndman and Athanasopoulos (2014): “prognozowalność” zależy od tego:
 - Jak dobrze rozumiemy czynniki, które oddziałują na obserwowaną zmienną
 - Jak dużo danych jest dostępnych
 - Czy prognozy danej zmiennej mają na nią wpływ
- Prognozy zapotrzebowania spełniają te warunki ...
- ... ale prognozy cen już nie

Bibliografia:

Hyndman & Athanasopoulos (2014) *Forecasting: principles and practice*, OTexts

2. ... oraz uśredniania prognoz

- Badania empiryczne w bardzo wielu dziedzinach
- Warunki, przy których uśrednianie działa wymienia **Timmermann (2006)**:
 - Pełny zbiór informacji nie jest obserwowany
 - Prognozy indywidualne różnie reagują na niestacjonarne zachowania zmiennej

Bibliografia:

Timmermann (2006) *Forecast combinations*, Handbook of Economic Forecasting

3. Najlepsza metoda uśredniania

- Jeden z celów badawczych w pracy **[P1]**
- Testowanie wsteczne zalecane do wyboru najlepszej metody
- Niektóre prace rozważają nawet uśrednianie uśredniania
- ... ale **średnia arytmetyczna** jest skuteczna i trudna do pokonania
 - Genre et al. (2013, IJF) *Combining expert forecasts: Can anything beat the simple average?*
 - DeMiguel et al. (2007, RFS) *Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?*

4. Własności teoretyczne QRA

- QRA należy do ogólnej klasy asymetrycznych funkcji straty w uśrednianiu prognoz
- Elliott and Timmermann (2004) przedstawiają wyniki teoretyczne
- (Przy pewnych założeniach) QRA jest równoważna dwukrokowej procedurze:
 - 1 Wyestymuj wagi metodą OLS (prognoza punktowa)
 - 2 Użyj błędów prognozy z kroku 1 do estymacji stałej w QRA
 - 3 $\Rightarrow$ Dokładność QRA związana z dokładnością uśredniania punktowego
- Własności teoretyczne regresji kwantylowej (Koenker, 2005)

Bibliografia:

Elliott & Timmermann (2004) *Optimal forecast combinations under general loss functions and forecast error distributions*, Journal of Econometrics

Koenker (2005) *Quantile regression*, Cambridge University Press