

Modelowanie spotowych cen energii elektrycznej

Rafał Weron

We współpracy z **Joanną Janczurą**, **Kubą Nowotarskim**, **Kubą Tomczykiem** (Wrocław),
Stefanem Trückem (Sydney) oraz **Rodney'em Wolffem** (Brisbane)



Institute of Organization and Management
Wrocław University of Technology

Wstęp

- ▶ Jakie jest pytanie?

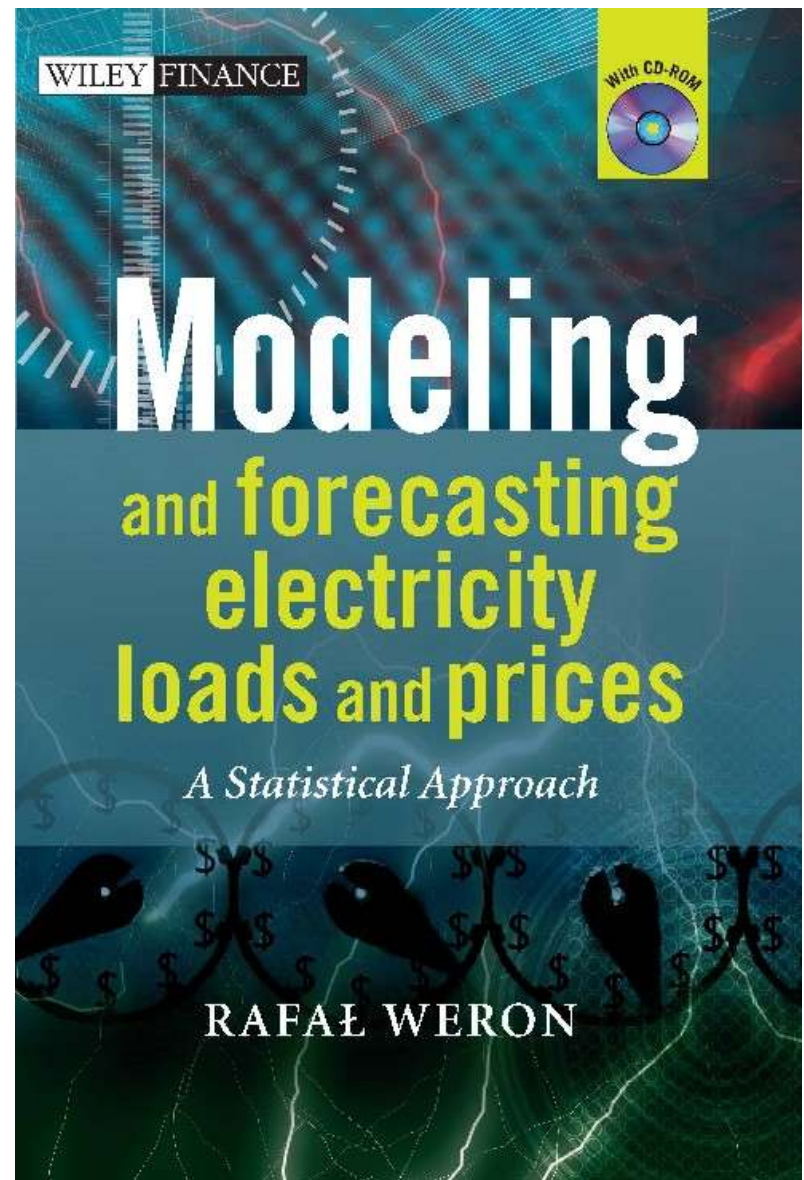
**Jak możemy modelować
spotowe ceny energii
elektrycznej?**

- ▶ Dlaczego jest ważne?



Dlaczego jest ważne?

- ▶ Bo można na ten temat pisać książki !



(Poważniejsza) motywacja

- ▶ Zarządzanie ryzykiem i inżynieria finansowa często wymagają modelu cen spotowych, który jest ...
- ▶ Realistyczny
 - Po co nam nierealistyczny model ?!
- ▶ Oszczędny ('nieprzeparametryzowany')
 - Szybsza symulacja, mniejsze błędy kalibracji
- ▶ Statystycznie poprawny
 - Możemy dopasować dowolny model do każdych danych ...
... Ale czy naprawdę **pasuje** do danych? Czy ma **sens**?

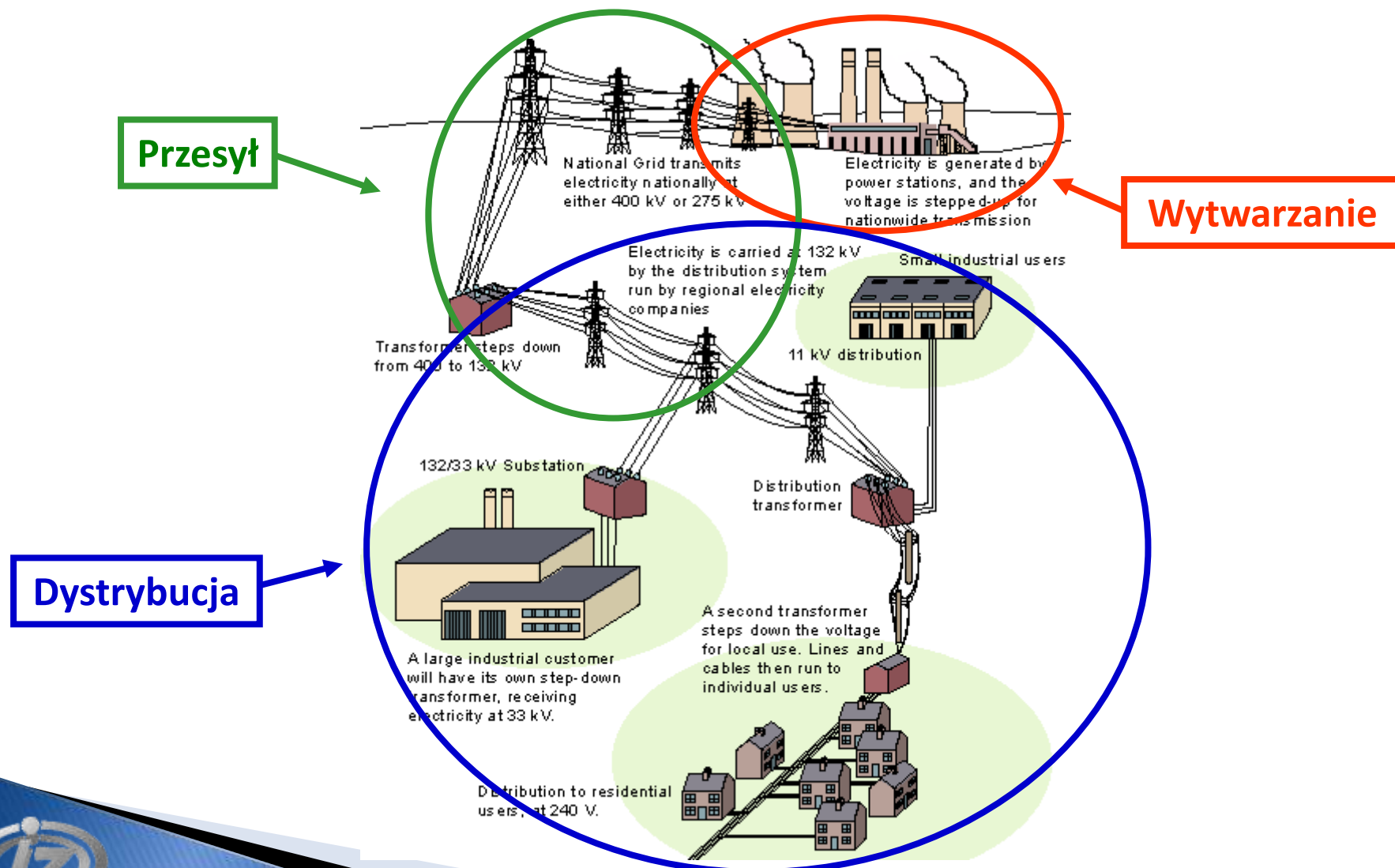


Tematy

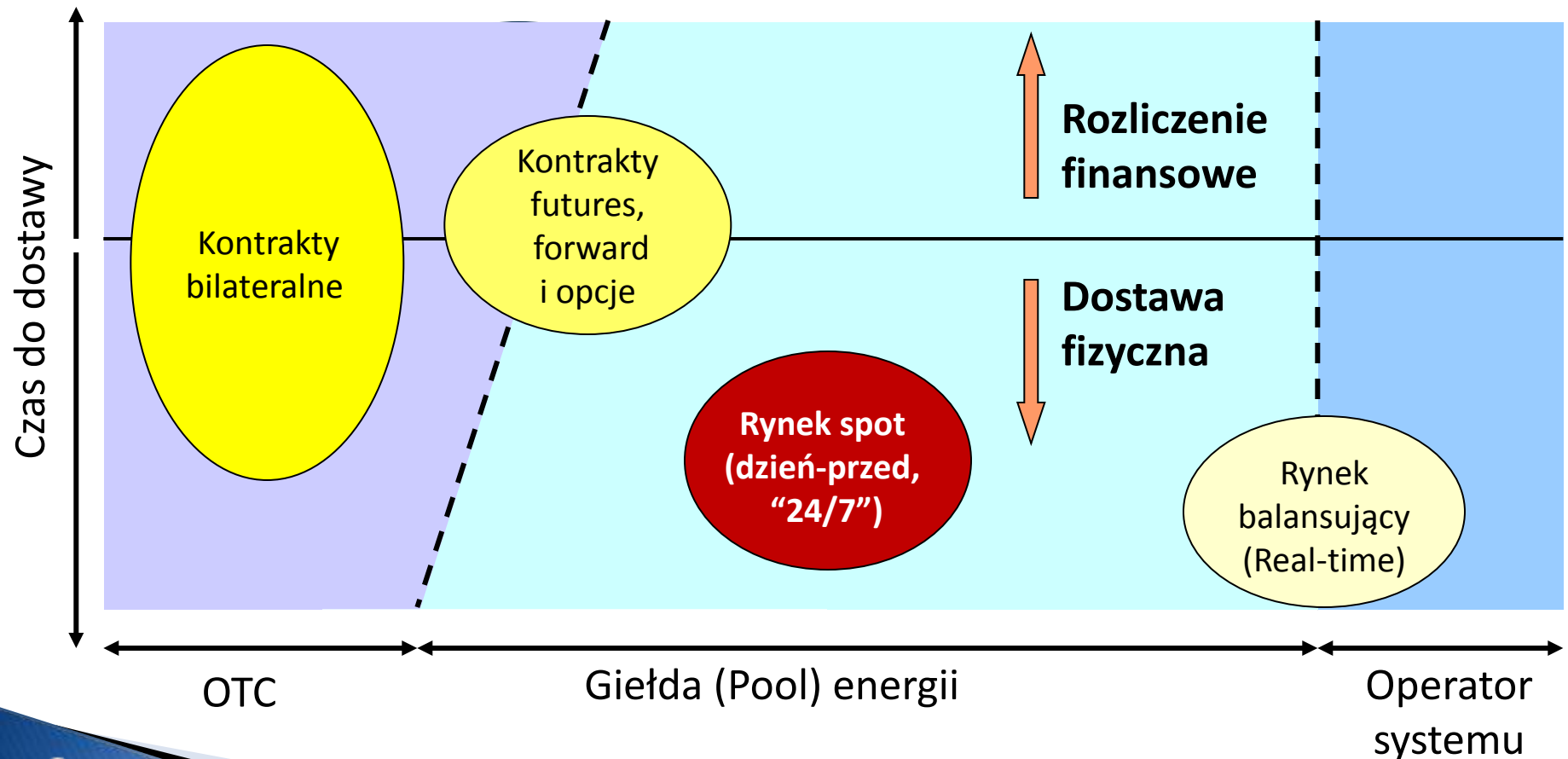
- ▶ **Rynki energii w pigułce**
 - **Struktura rynku**
 - **Rynek spotowy**
 - **Energia elektryczna jest (wyjątkowym) towarem**
- ▶ Przegląd modeli
- ▶ Modele MRS drugiej generacji



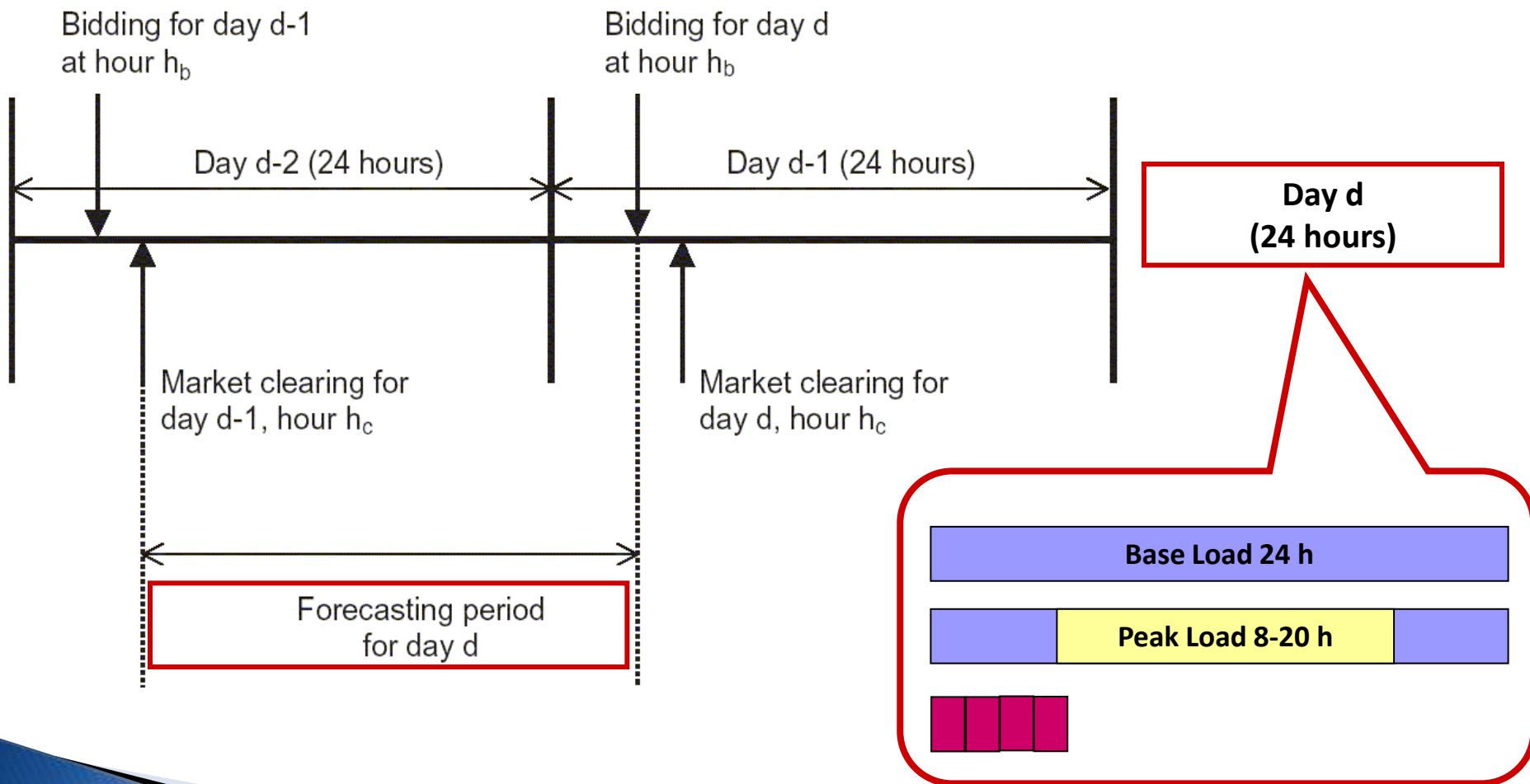
System elektroenergetyczny



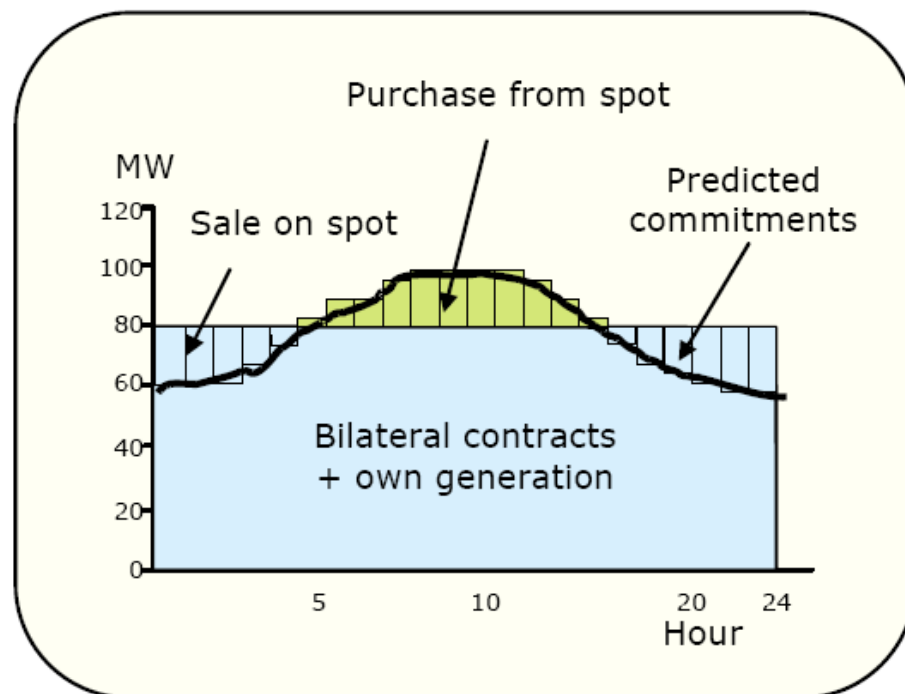
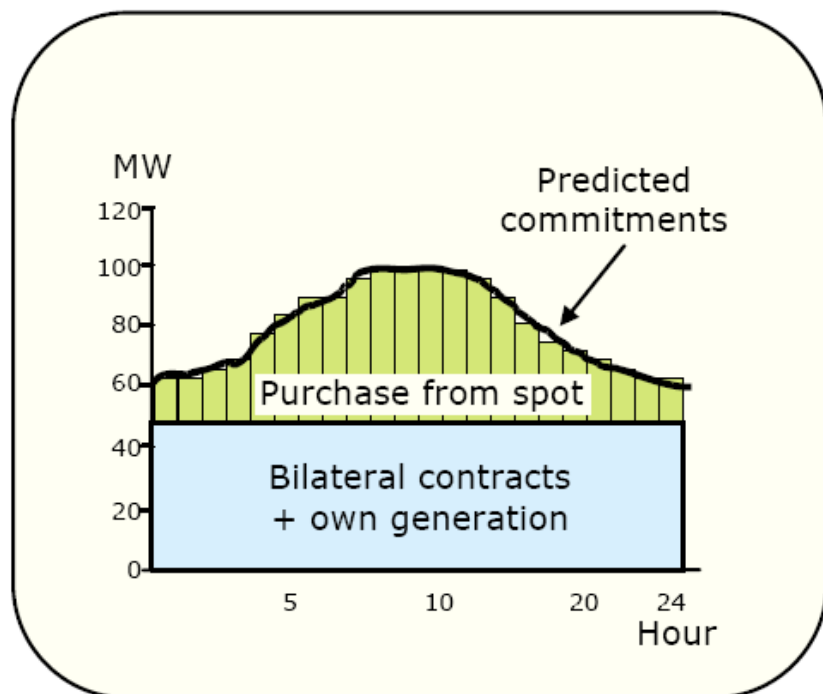
Struktura hurtowego rynku energii elektrycznej



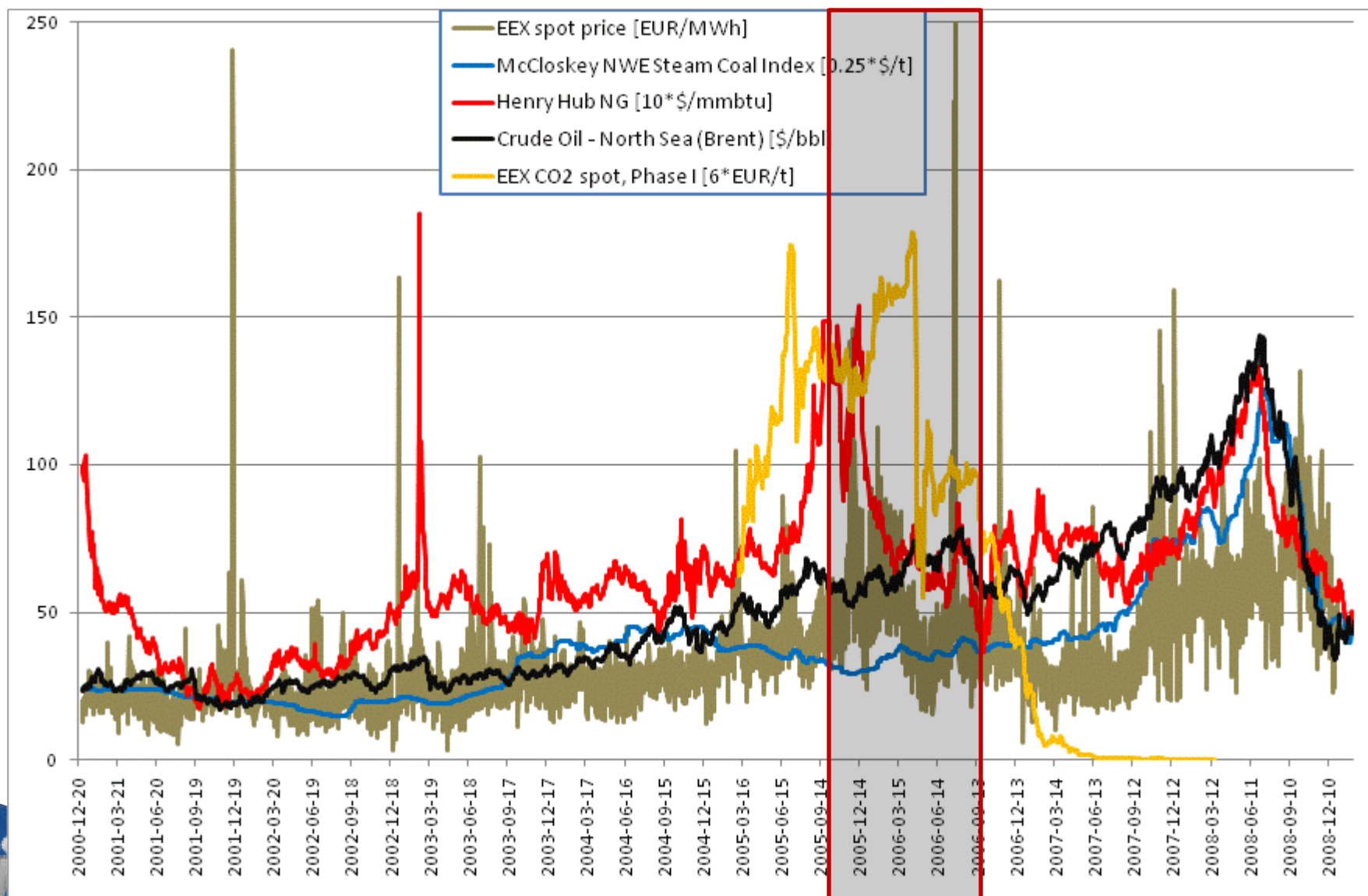
Rynek spotowy



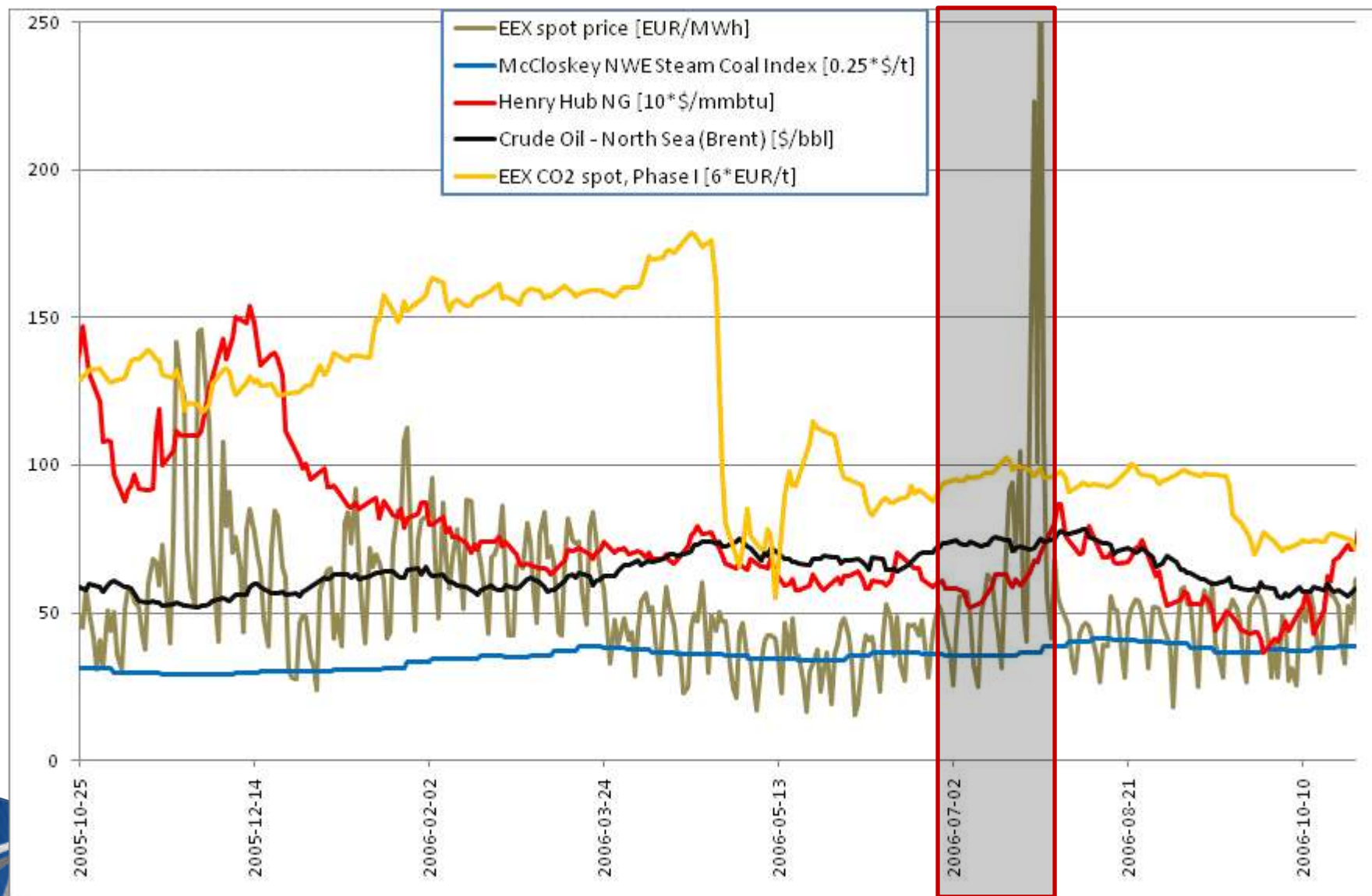
Wykorzystanie rynku spotowego



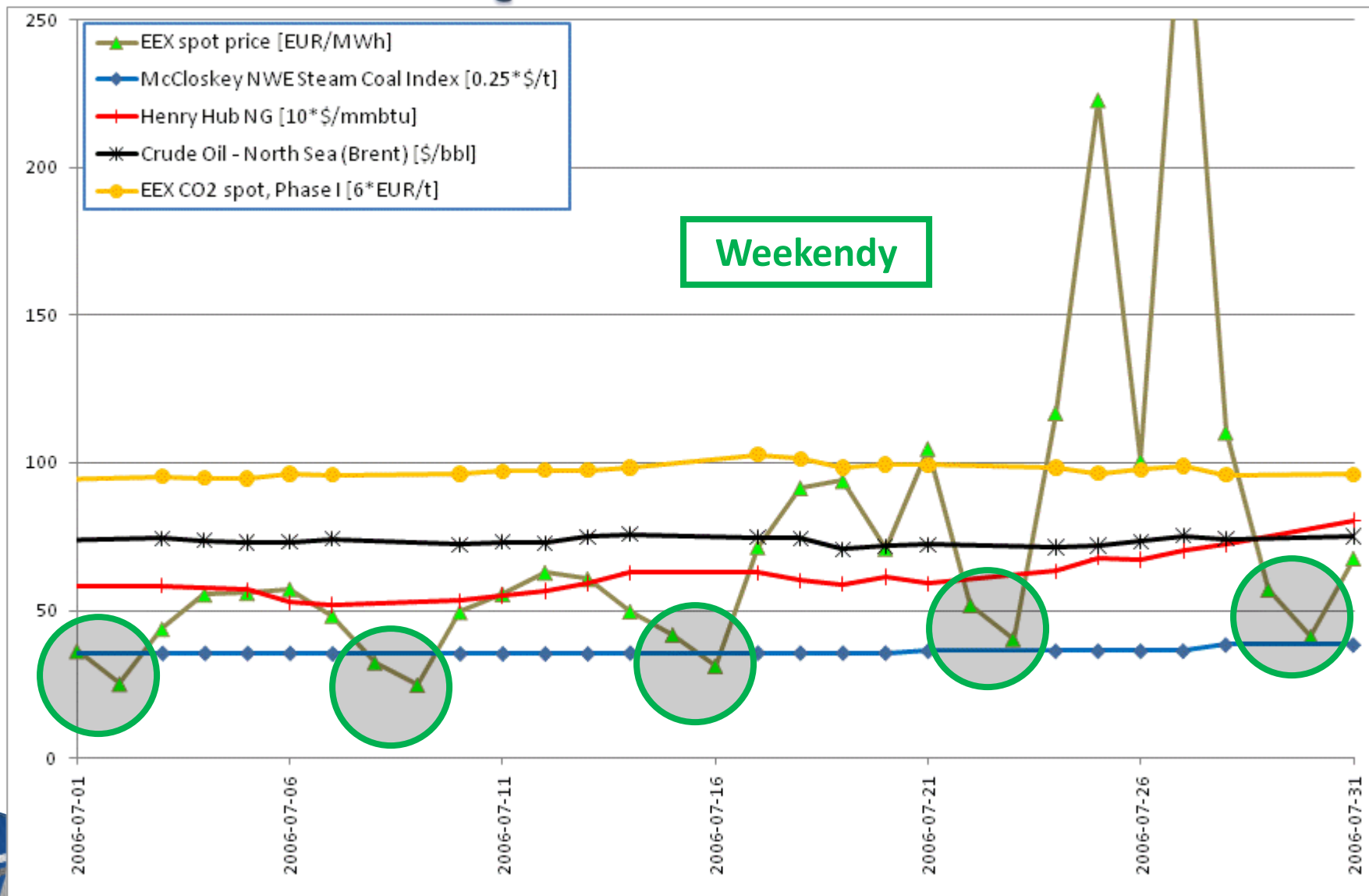
Spotowe rynki towarowe



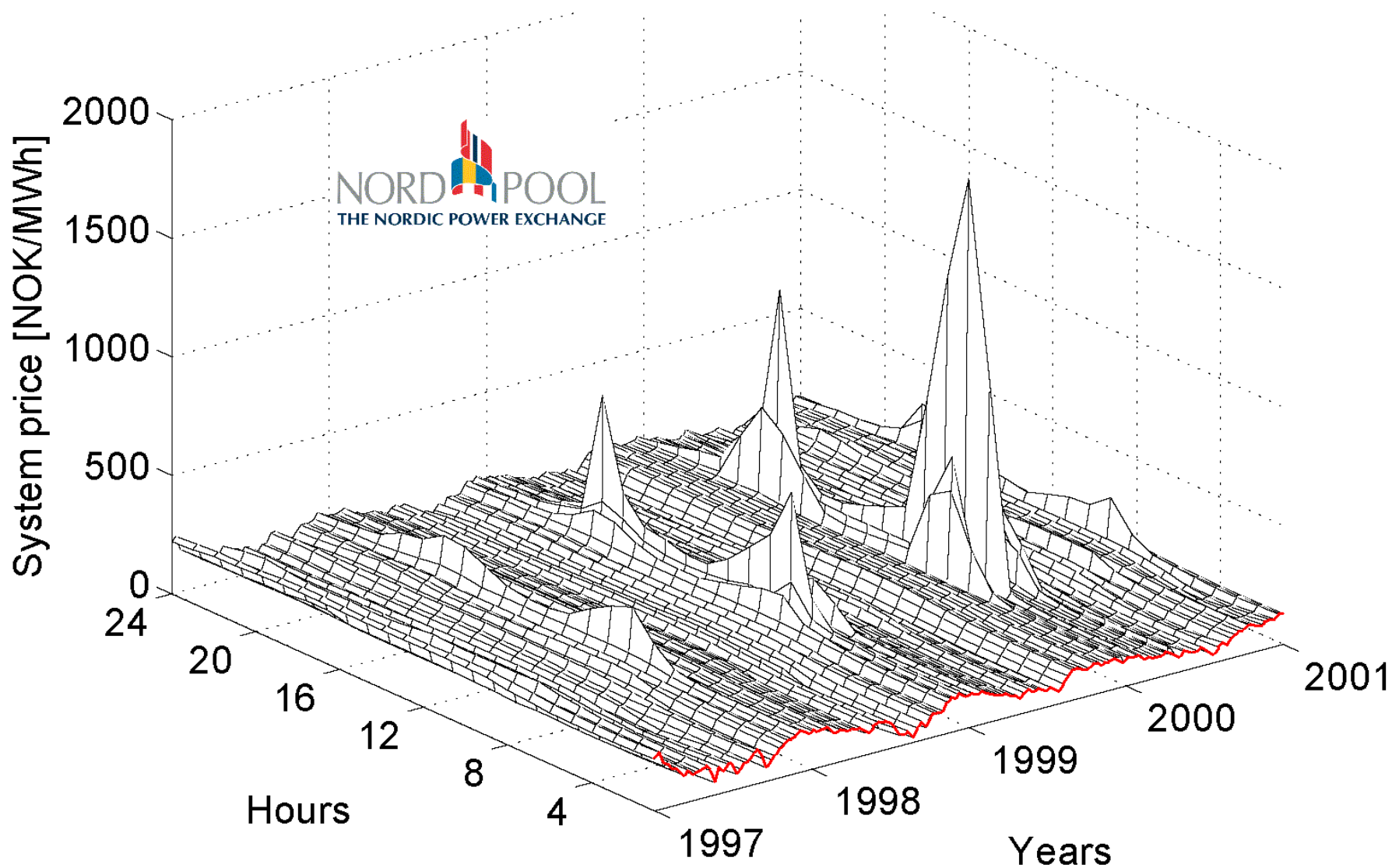
Jeden rok



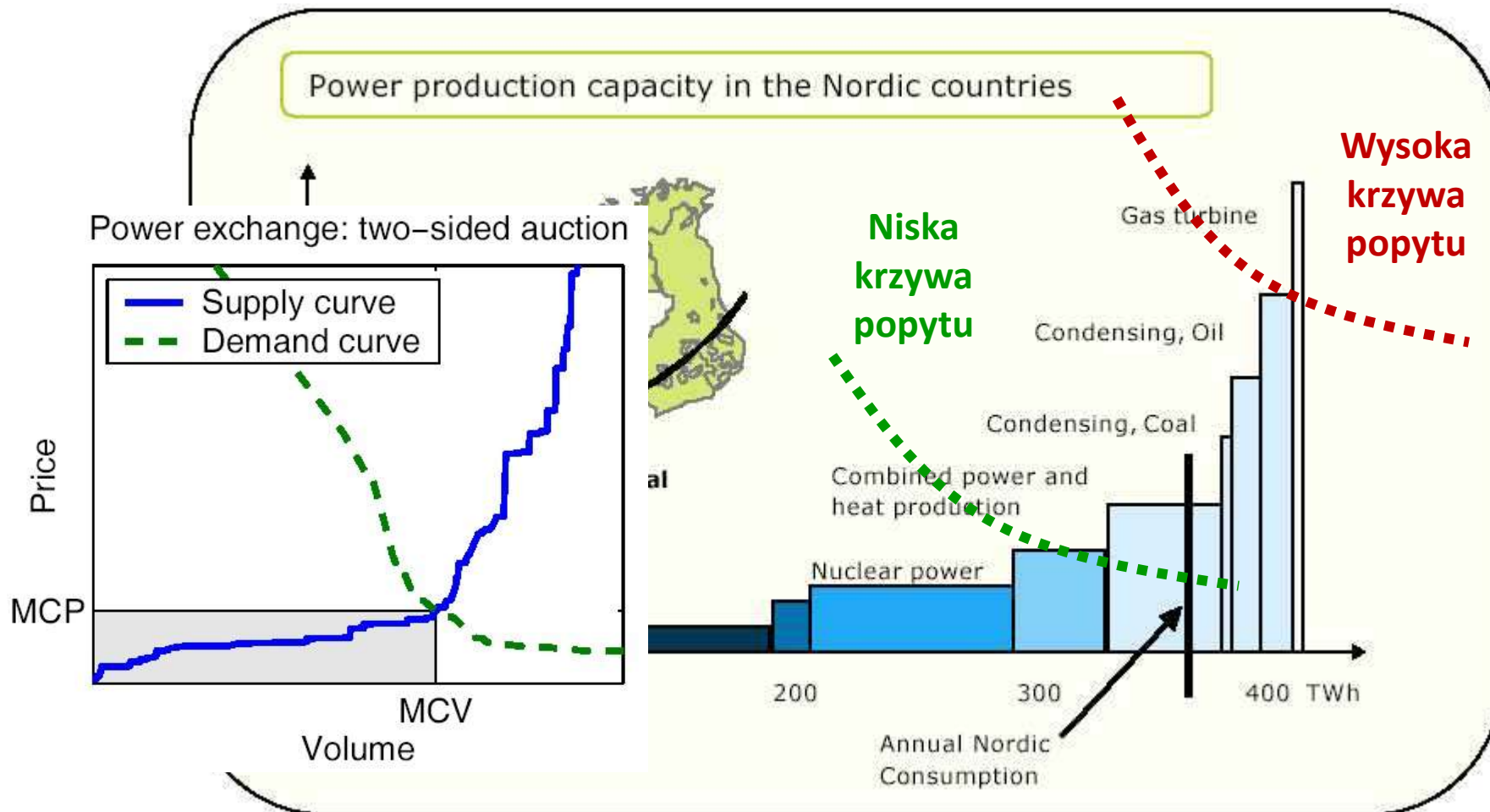
Jeden miesiąc



Okresowość i piki cen



Równowaga rynkowa a piki cen



Nawet średnie dobowe ceny mogą być bardzo zmienne ... i ujemne!

$$\ln(1100) \approx 7, \ln(30) \approx 3.4$$

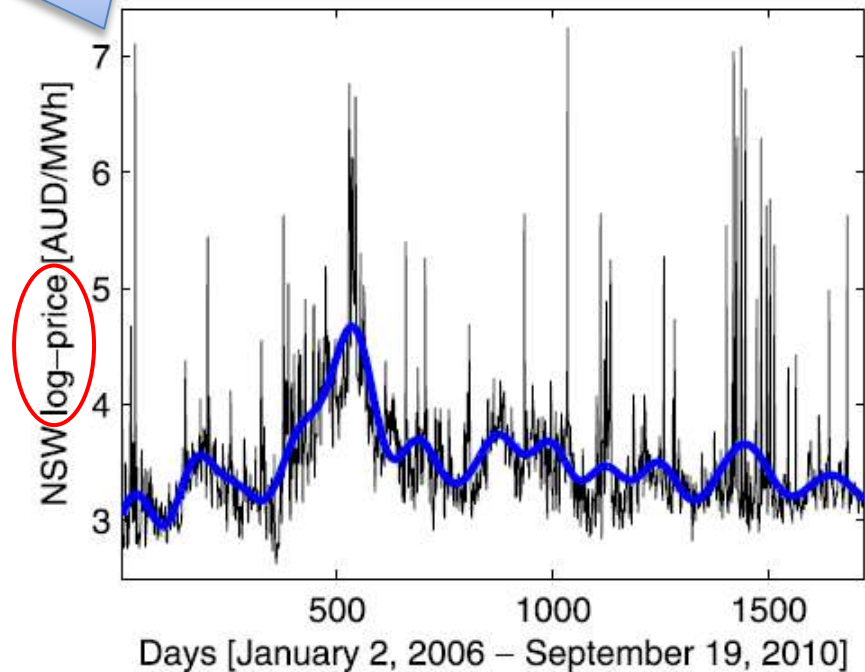
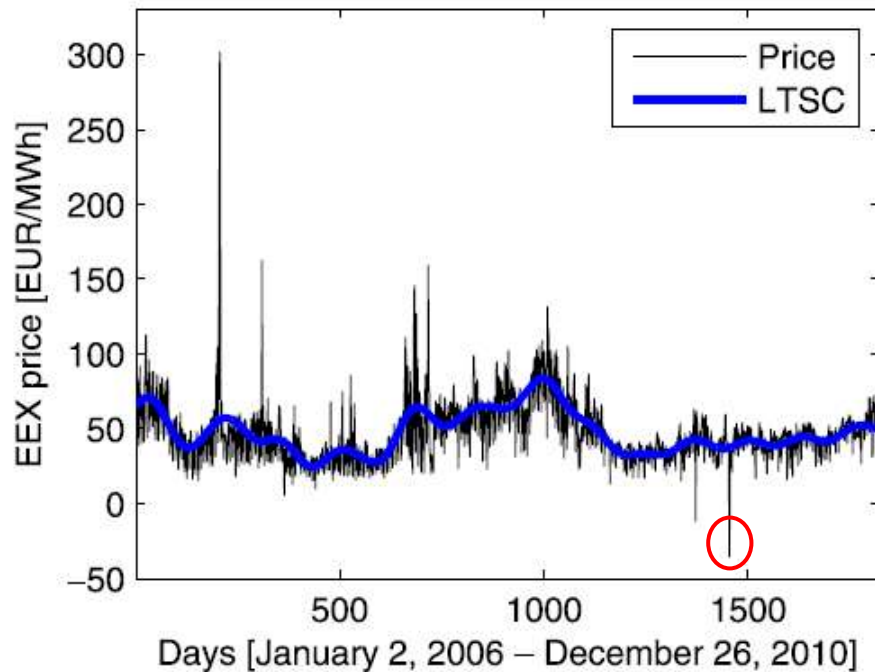
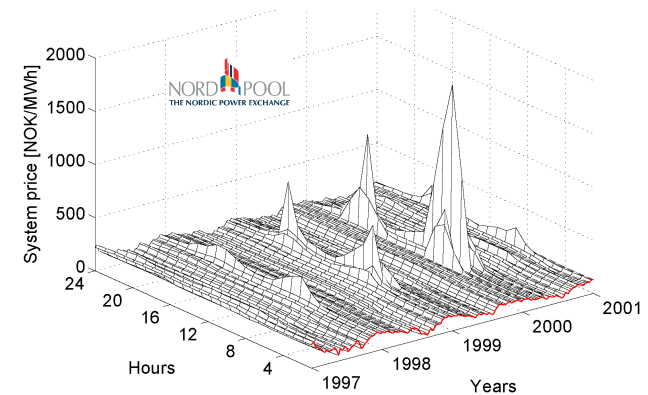


Fig. 6 (Color online) Mean daily spot EEX prices (*left panel*) and NSW log-prices (*right panel*) and the estimated long-term seasonal components (LTSC; *thick blue lines*)

Energia elektryczna jest (wyjątkowym) towarem

- ▶ Ograniczone możliwości przechowywania i przesyłu
- ▶ Zależność od pogody i sezonowość
 - Dobowa, tygodniowa, roczna
- ▶ Piki (*spikes*) cen i zapotrzebowania/konsumpcji
 - Ekstremalna zmienność, do 50% dla dziennych zwrotów
- ▶ Efekt odwrotnej dźwigni (*Inverse leverage effect*)
 - Ceny i zmienność są dodatnio skorelowane; ale obie ujemnie względem poziomu zapasów

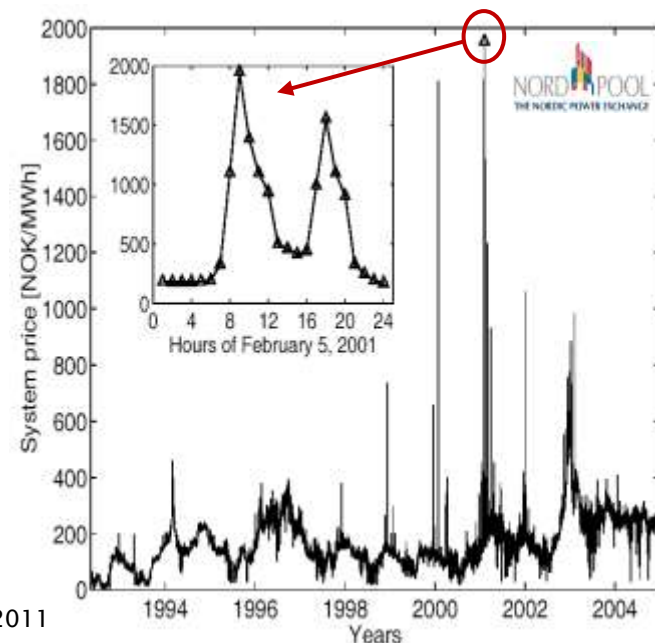


Tematy

- ▶ Rynki energii w pigułce
- ▶ **Przegląd modeli**
 - **Konieczność odsezonowywania**
 - **Modele JD oraz MRS**
 - **Algorytm EM dla modeli MRS**
 - **Problemy z modelami MRS pierwszej generacji**
- ▶ Modele MRS drugiej generacji



Modele typu '*reduced form*'



Black-Scholes (1973)

→ Geometric Brownian Motion (GBM)

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

Vasicek (1977), CIR (1985)

→ Mean-Reverting Diffusion (MRD)

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t) dt + \sigma X_t dW_t$$

???

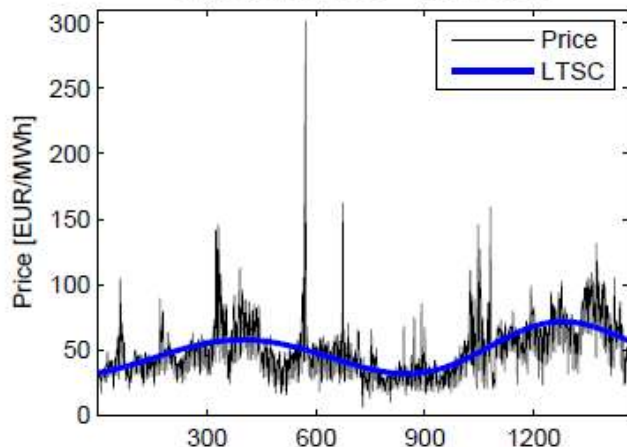
$$dX_t = (\alpha - \beta X_t) dt + \sigma X_t dW_t$$

+ piki cen

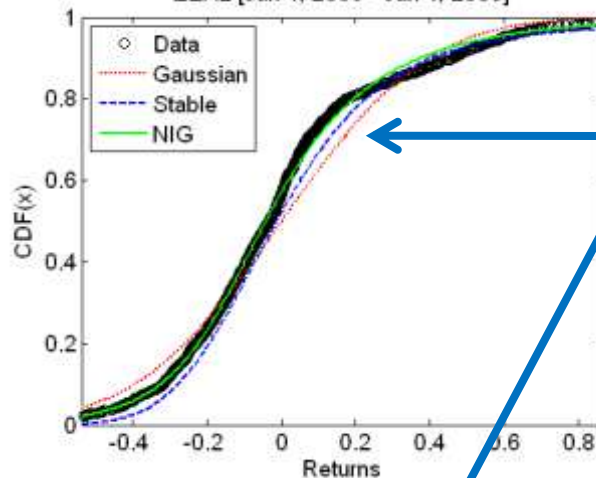


Konieczność odsezonowywania ...

EEX2 [Jan 3, 2005 – Jan 4, 2009]



EEX2 [Jan 4, 2005 – Jan 4, 2009]



Skośność

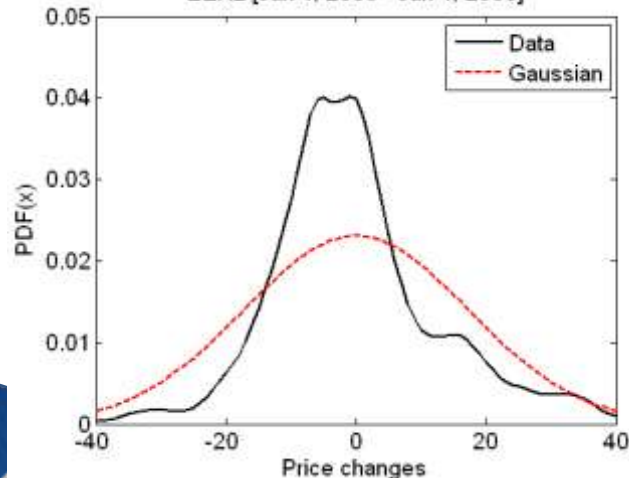
powodowana cyklem
dni robocze – dni wolne

Rozwiązanie:

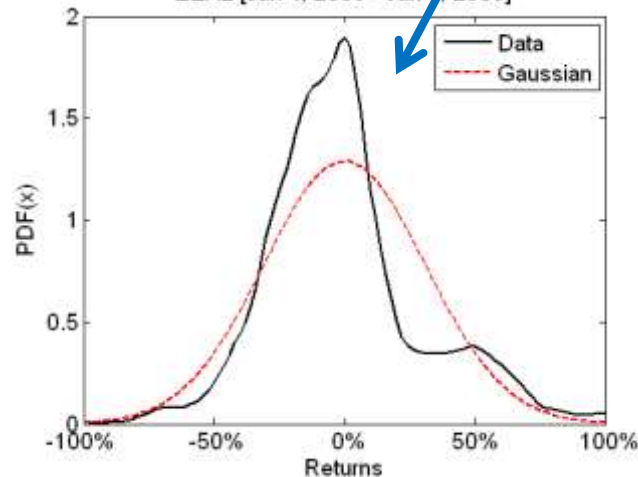
Dopasować
krótkoterminową
komponentę
sezonową
(*short-term seasonal
component*, STSC)

tj. znaleźć 'typowy
tydzień'

EEX2 [Jan 4, 2005 – Jan 4, 2009]



EEX2 [Jan 4, 2005 – Jan 4, 2009]



Długoterminowa komponenta sezonowa

(Long-term seasonality, LTSC)

- ▶ Funkcje kawałkami stałe (*piecewise constant functions, dummy variables*) dla każdego miesiąca

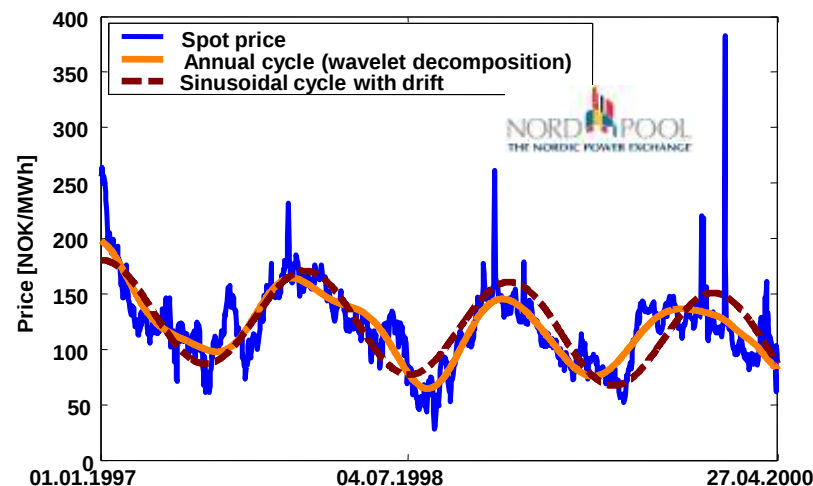
- Bhanot (2000), Haldrup & Nielsen (2006), Knittel & Roberts (2005), Lucia & Schwartz (2002)

- ▶ Sinusoidy (sumy sinusów) z trendem

- Bierbrauer et al. (2007), Borovkova & Permana (2006), Cartea & Figueroa (2005), De Jong (2006), Geman & Roncoroni (2006), Lucia & Schwartz (2002), Pilipovic (1997), Weron (2006), Nowotarski et al. (2012)

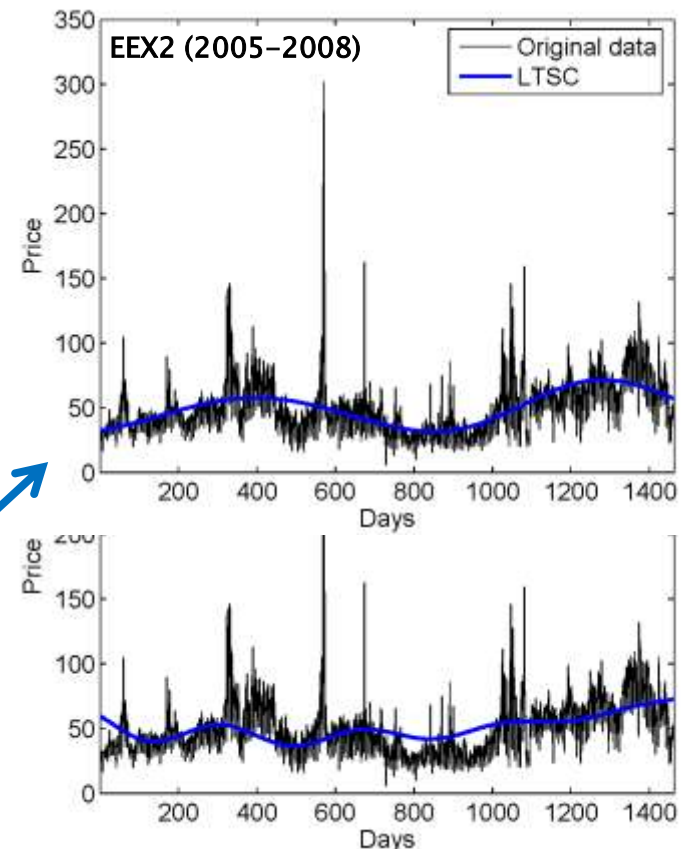
- ▶ Wygładzanie falkowe

- Weron et al. (2004), Trück et al. (2007), Weron (2008), Janczura & Weron (2009-2011), Nowotarski et al. (2012)

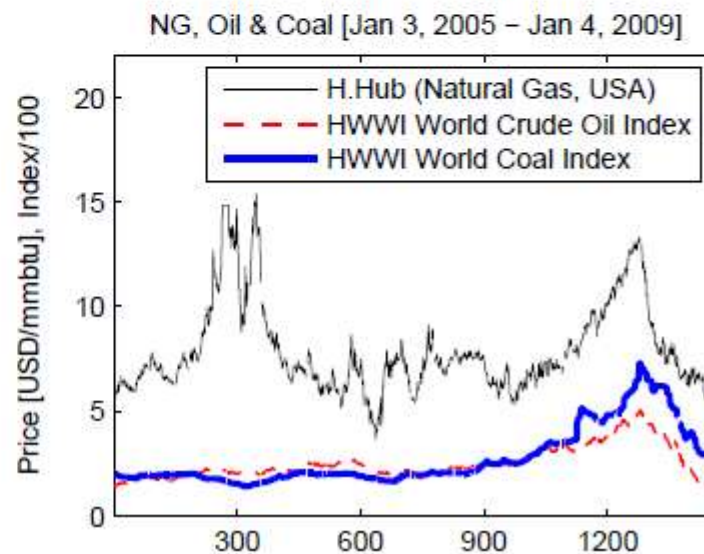
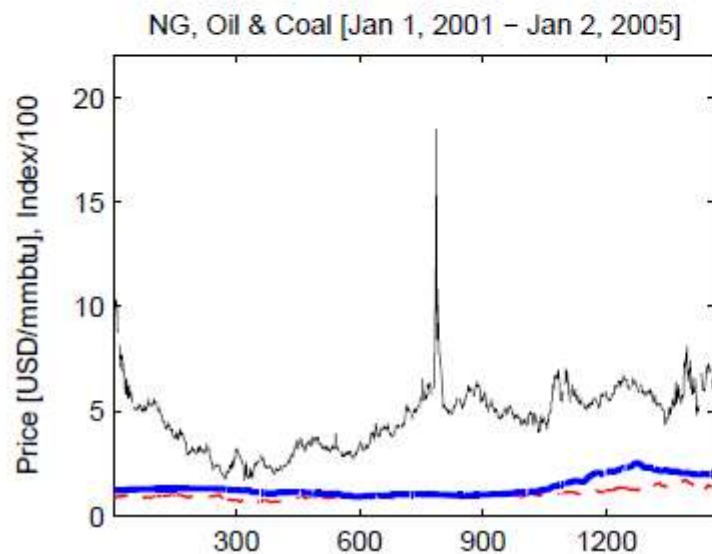
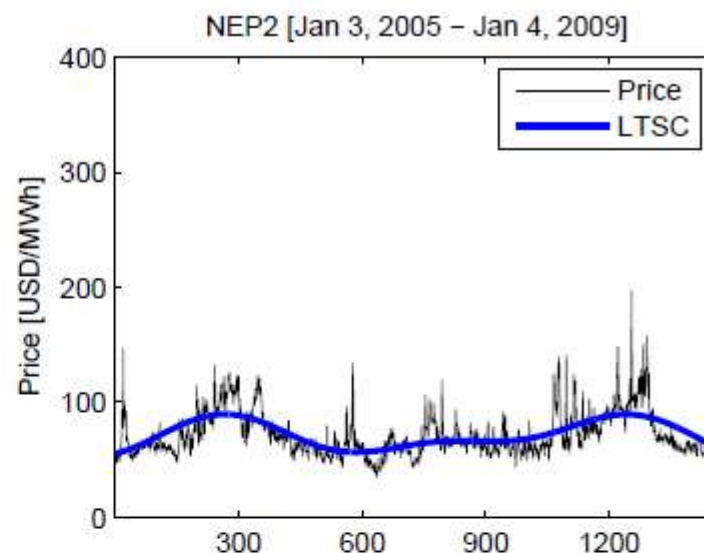
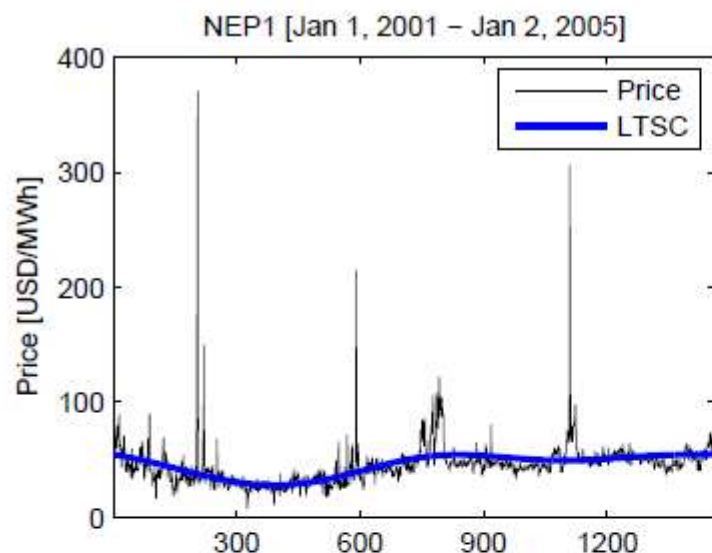


Wygładzanie falkowe

- ▶ Dekompozycja: $x(t) = S_J + D_J + D_{J-1} + \dots + D_1$, dla $2^J < \#obs$
- ▶ Na najwyższym poziomie sygnał może być aproksymowany przez S_J
 - Dodając tzw. ‘falki matki’ D_j niższych poziomów $j = J-1, J-2, \dots$, otrzymujemy lepsze oszacowanie oryginalnego sygnału
→ tzw. ‘**lowpass filtering**’
- ▶ Dla dziennych danych aproksymacje S_3, S_5 i S_8 mniej więcej odpowiadają
 - tygodniowemu ($2^3 = 8$ dni),
 - miesięcznemu ($2^5 = 32$ dni)
 - **rocznemu ($2^8 = 256$ dni) wygładzaniu**



Motywacja do użycia falek ...



Modele typu '*jump-diffusion*' (JD)

- ▶ Pierwsze próby modelowania cen energii
 - Clewlow & Strickland (2000), Eydeland & Geman (2000), Kaminski (1999)
 - Odsezonowana cena spotowa X_t jest opisana modelem JD:

$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dB + dq(X, t)$$

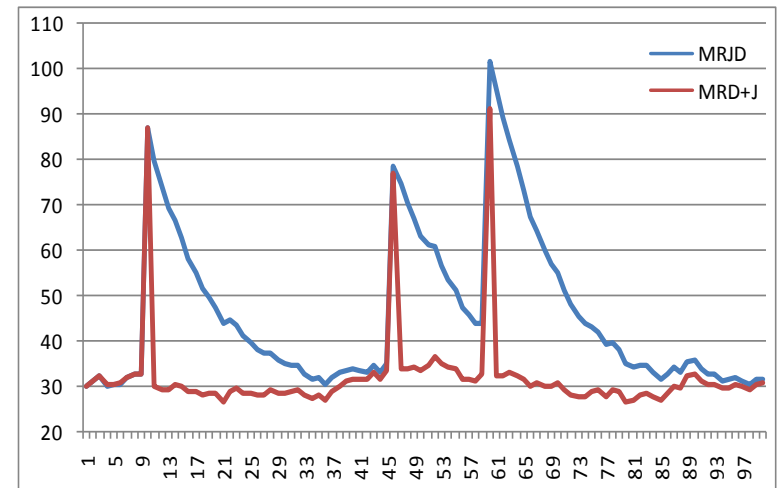
Uogólniony dryf
(*generalized drift*),
zazwyczaj powracający do
średniej (*mean reverting*)

Uogólniona zmienność
(*generalized volatility*),
potencjalnie
heteroskedastyczna

Proces skokowy z zadaną
intensywnością i rozmiarem
skoku – np. złożony proces
Poissona: $dq(X, t) = XdN_t$

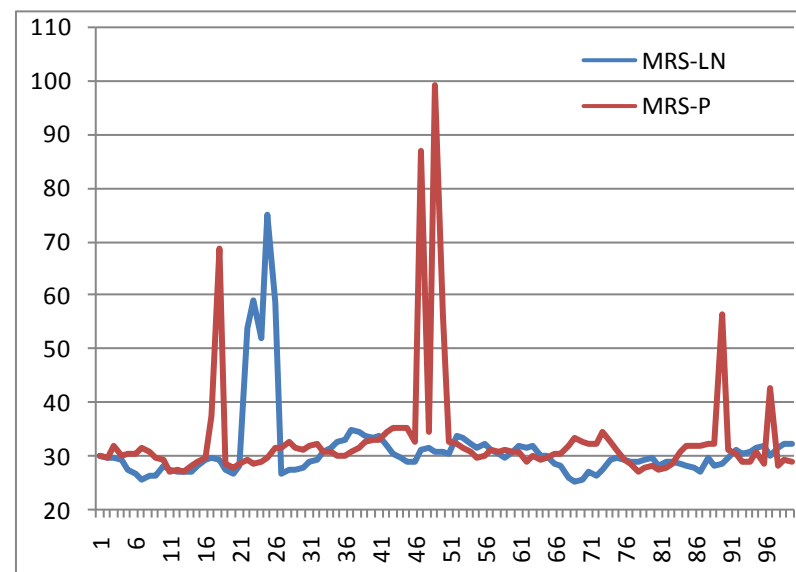
Problemy z modelami JD

- ▶ Po skoku cena powraca do normalnego poziomu wykorzystując mechanizm
 - Powracania do średniej (**MRJD**)
 - Powracania do średniej ze skokami w dół
 - Deng (1999), Escribano et al. (2002), Geman & Roncoroni (2006)
 - Skoków w dół tej samej wielkości – w skali dobowej (**MRD+J**)
 - Weron et al. (2004), Weron (2008)
 - Powracania do średniej z różnymi ‘prędkościami’
 - Benth et al. (2007), Benth et al. (2008)



Problemy z modelami JD cd.

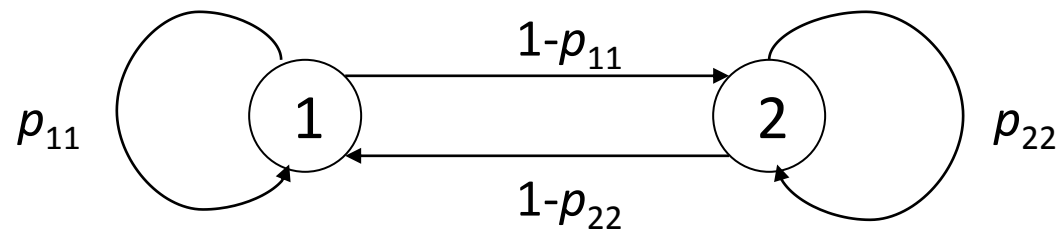
- ▶ Co robić z okresami następujących po sobie skoków?
 - Awarie sieci, generatorów
- ▶ Rozwiązanie:
 - Pozwolić procesowi ceny aby z pewnym prawdopodobieństwem 'pozostał' w stanie 'skokowym'
 - Modele przełącznikowe (*regime-switching models*)
 - **Markov regime-switching (MRS)**
 - Threshold autoregressions (TAR, SETAR, STAR)



Modele MRS

- ▶ Mechanizm przełącznikowy jest opisany łańcuchem Markowa o dwóch lub więcej stanach (reżimach)
 - Stany nie są obserwowalne
 - Estymacja z wykorzystaniem algorytmu EM (*expectation-maximization*)

Model dwustanowy: $X_t = \{1, 2\}$



Prawdopodobieństwa przejścia:

$$\mathbf{P} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - p_{12} & p_{12} \\ p_{21} & 1 - p_{21} \end{pmatrix}$$

Modele MRS pierwszej generacji

(dla log-cen energii elektrycznej)

- ▶ Ethier & Mount (1998) zaproponowali model dwustanowy opisany dwoma procesami AR(1)
 - Wnioski: istotnie różne średnie i wariancje w obu reżimach
 - **Model MRS typu ‘parameter-switching’**

$$X_t = \alpha_{R_t} + (1 - \beta_{R_t})X_{t-1} + \sigma_{R_t} \epsilon_t$$

- Z tym samym zestawem szumów losowych w obu stanach
- Aktualna wartość procesu zależy **tylko od ostatniej obserwacji**, bez względu na to, z którego pochodzi reżimu



Modele MRS pierwszej generacji cd.

(dla log-cen energii elektrycznej)

- ▶ Huisman & de Jong (2003): model dwustanowy

- Z reżimem bazowym typu AR(1)

$$X_{t,i} = \alpha_i + (1 - \beta_i)X_{t-1,i} + \sigma_i \epsilon_{t,i}$$

oraz **niezależnymi pikami (*independent spikes, IS*)**

– gaussowską zmienną losową o wyższej średniej i wariancji

- Bierbrauer et al. (2004), Weron et al. (2004)
→ piki opisane rozkładem log-normalnym oraz Pareto
- De Jong (2006) → piki opisane procesem typu JD



Algorytm EM dla modeli MRS

(Dempster et al., 1977; Hamilton, 1990; Kim, 1993)

- ▶ ‘Krok E’: estymacja tzw. **smoothed inferences** $P(R_t = i | \mathbf{x}_T; \theta^{(n)})$
 - czyli przewidywać, że w chwili t proces jest w stanie i , wykorzystując parametry startowe $\theta^{(0)}$
- ▶ ‘Krok M’: dokładniejsze estymatory parametrów
 - Każdy składnik funkcji NW musi być ważony odpowiednim prawdopodobieństwem typu *smoothed inference*

$$\log [L(\eta^{(n+1)})] = \sum_{i=1}^L \sum_{t=1}^T P(R_t = i | \mathbf{x}_T; \theta^{(n)}) \log [f(x_t | R_t = i, \mathbf{x}_{t-1}; \eta^{(n+1)})]$$

$$\theta^{(n+1)} = (\eta^{(n+1)}, \mathbf{P}^{(n+1)}, \rho_i^{(n+1)})$$

- ▶ Kolejny cykl algorytmu wykorzystuje wektor $\theta^{(n+1)}$, aby wyznaczyć dokładniejsze *smoothed inferences*



Model MRS z niezależnymi pikami

- ▶ Wartości stanu AR (np. bazowego) są nieobserwowalne gdy proces jest w innym reżimie
 - Rozkład X_t jest zależny od całej historii ($x_1, \dots, x_{t-1}$) $\rightarrow$ wszystkie trajektorie procesu stanów powinny być wykorzystane w kroku E
 - Liczba możliwych trajektorii wynosi 2^T (dla modelu dwustanowego)

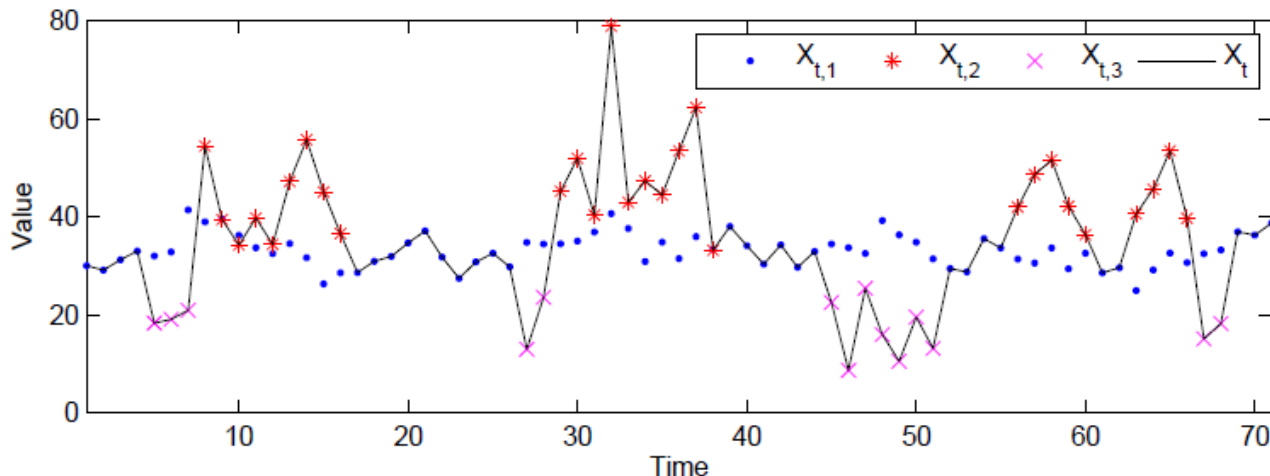


Fig. 2 A sample trajectory of a MRS model with three independent regimes (black solid line)

Model MRS z niezależnymi pikami cd.

- ▶ [Huisman & de Jong \(2002\)](#): użyli prawdopodobieństw ostatnich 10 obserwacji
 - Kiedy można tak robić?
- ▶ [Janczura & Weron \(2012\)](#): w kroku M zastąpili nieobserwowalne zmienne x_t ze stanu(ów) typu AR ich wartościami oczekiwanymi
 - ... wyznaczonymi na podstawie całej dostępnej informacji w chwili t , wykorzystując rekurencyjny wzór

$$E\left(X_{t,i}|\mathbf{x}_t; \theta^{(n)}\right) = P\left(R_t = i|\mathbf{x}_t; \theta^{(n)}\right) x_t + P\left(R_t \neq i|\mathbf{x}_t; \theta^{(n)}\right) \cdot \left\{ \alpha_i^{(n)} + \left(1 - \beta_i^{(n)}\right) E\left(X_{t-1,i}|\mathbf{x}_{t-1}; \theta^{(n)}\right) \right\}$$

- Podobne podejście użył [Gray \(1996\)](#) aby uniknąć problemu zależności trajektorii od warunkowej zmienności w modelach typu RS-GARCH



Model MRS z niezależnymi pikami cd.

- ▶ Całkowita liczba prawdopodobieństw (liczb rzeczywistych) jakie trzeba przechować w pamięci:
 - Algorytm EM: $2(2^{T+1}-1)$
 - Huisman & de Jong (2002): $2\{2^{10}(T-9)-1\}$
 - Janczura & Weron (2012): $4T$
 - To pozwala na od 100 do ponad 1000 razy szybszą estymację dla próbek typowej wielkości (kilka tysięcy wartości) niż metoda Huismana i de Jonga



Problemy

z modelami MRS pierwszej generacji dla log-cen

- ▶ Niektórzy autorzy stwierdzali, że *‘oczekiwane wielkości pików’* ($\equiv E(Y_{t,\text{spike}}) - E(Y_{t,\text{base}})$) są **ujemne**
 - Np. [De Jong \(2006\)](#), [Bierbrauer et al. \(2007\)](#)
 - ... ale nie uważali tego za błędna specyfikację modelu
- ▶ Klasyfikacja obserwacji nie była sprawdzana ale ...
 - ... podczas kalibracji prawie wszystkie ekstremalne wartości są zaliczane do stanu pikowego
 - *‘Nagłe spadki’* w log-cenach nie są interesujące z punktu widzenia modelowania cen i wyceny pochodnych
 - Wydają się ekstremalne tylko z powodu transformacji logarytmicznej



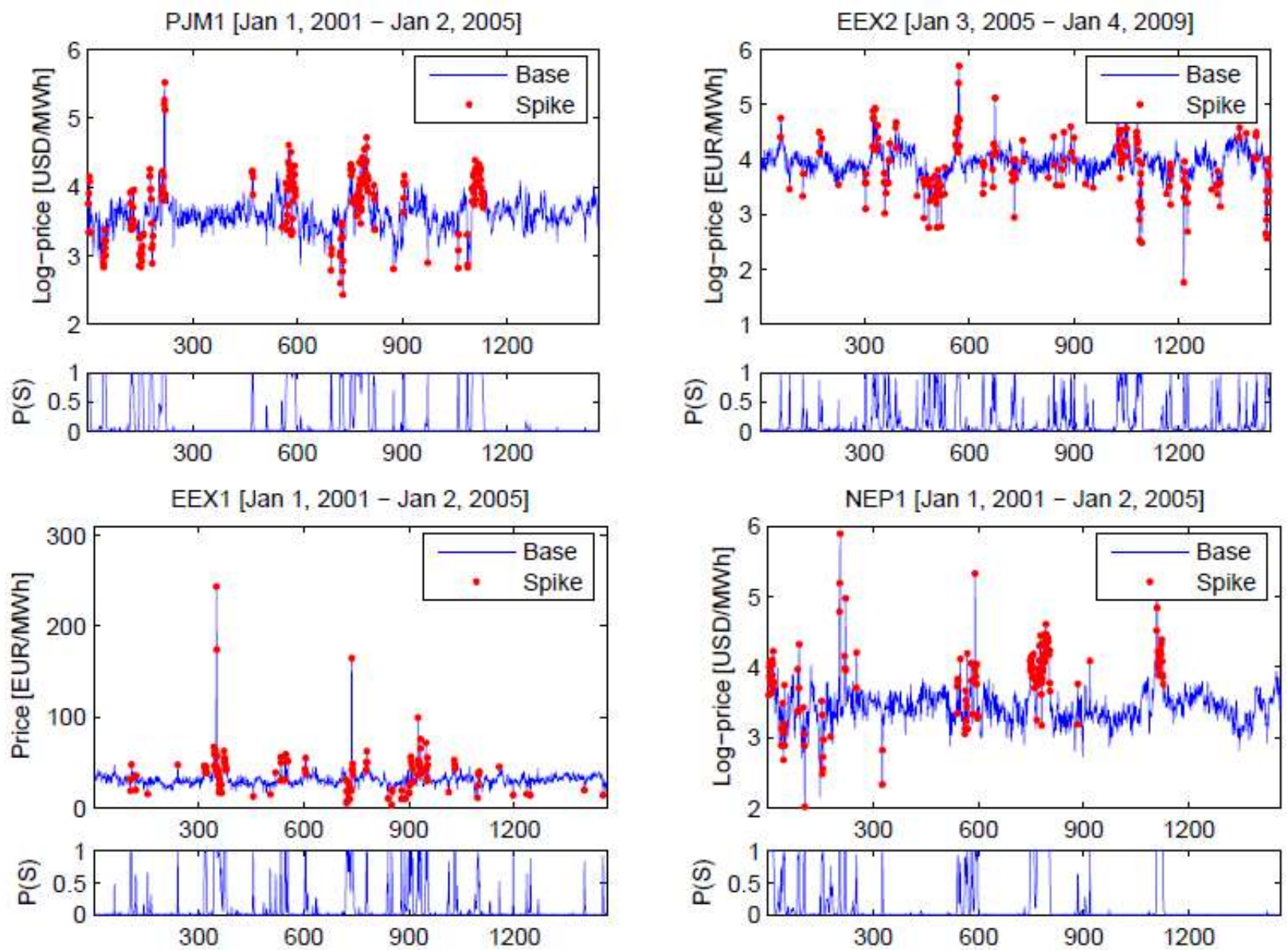


Figure 3: Sample calibration results for 2-regime models with Vasicek, i.e. AR(1), base regime dynamics and alternative spike regimes fitted to deseasonalized prices or log-prices from three major power markets. *Top left:* An independent spike (IS) model with normal spikes fitted to PJM log-prices. *Top right:* The Ethier and Mount (1998) model with AR(1) spike regime fitted to EEX log-prices. *Bottom left and right:* An IS model with lognormal spikes fitted to EEX prices and NEPOOL log-prices, respectively. The corresponding lower panels display the conditional probability $P(S) \equiv P(R_t = s | x_1, x_2, \dots, x_T)$ of being in the spike regime. The prices or log-prices classified as spikes, i.e. with $P(S) > 0.5$, are additionally denoted by dots in the upper panels. For descriptions of the datasets see Section 2 and Figures 1-2.

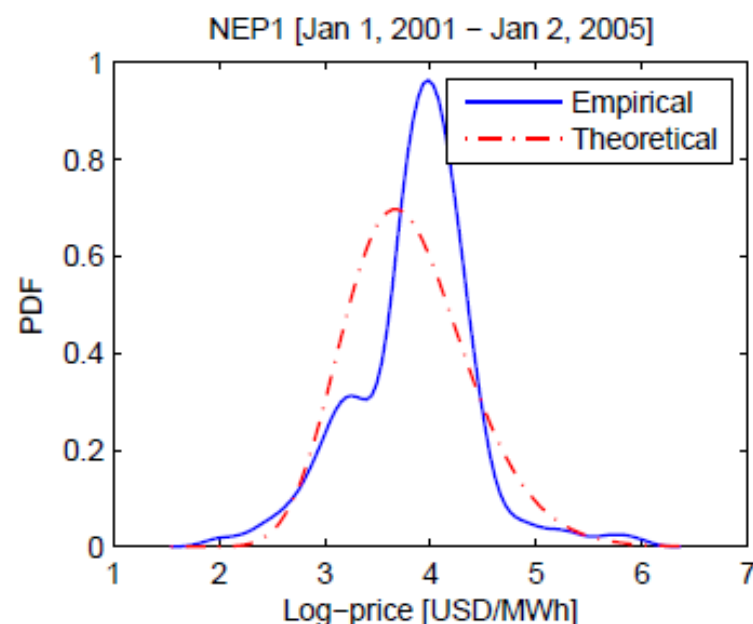
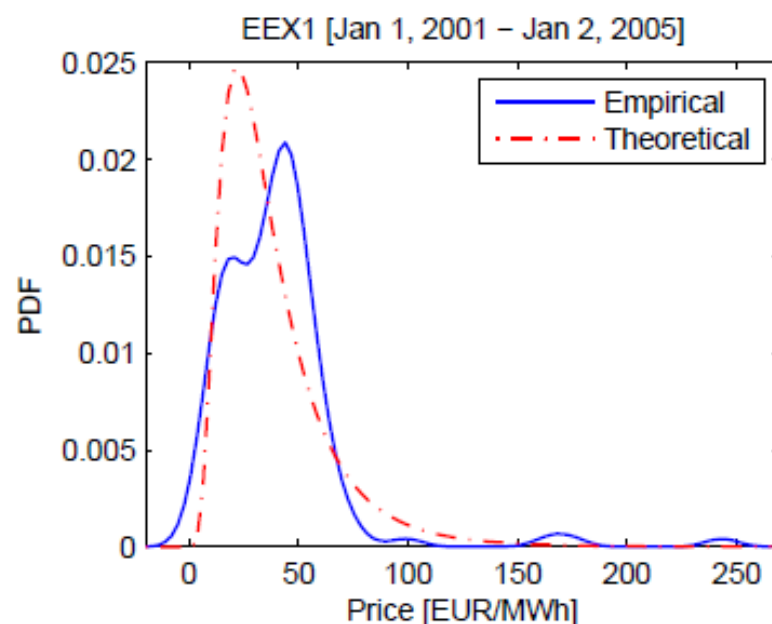
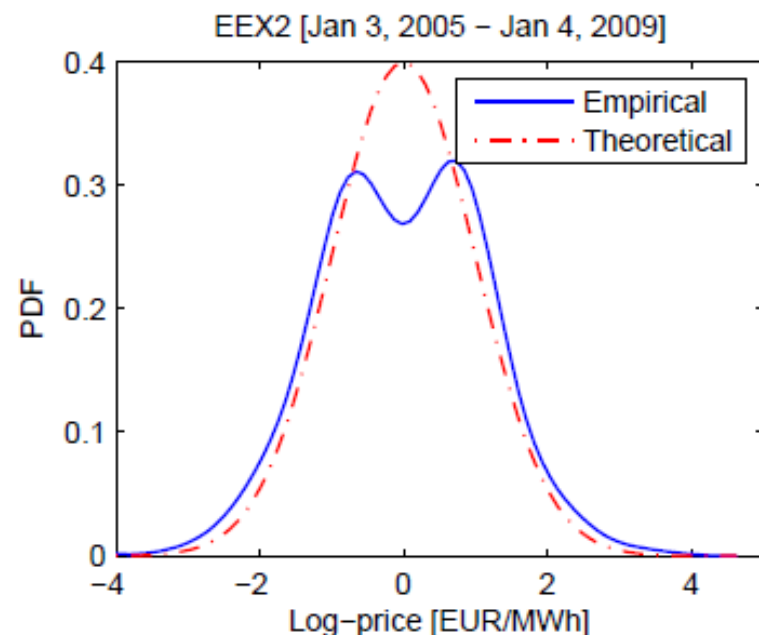
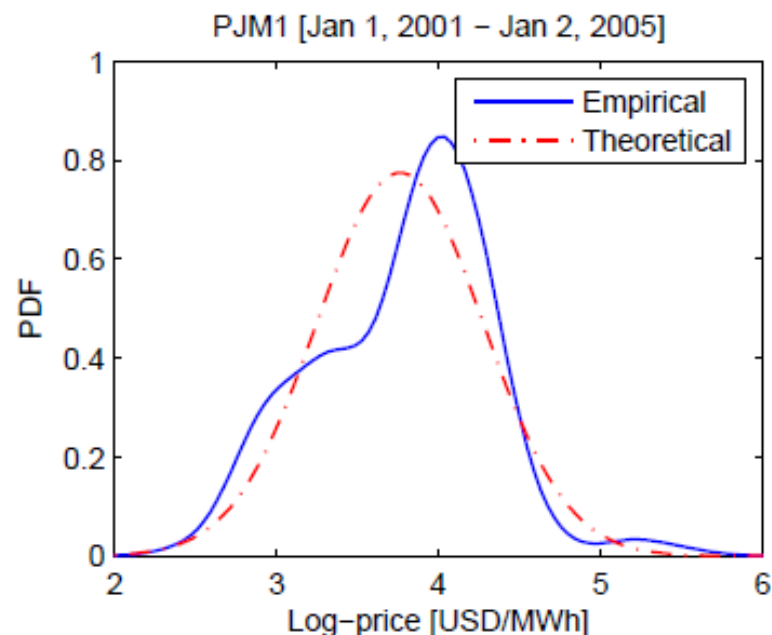


Figure 4: Comparison of empirical (sample) and theoretical (model implied) spike regime probability distribution functions in the first generation 2-regime models. The models and datasets are the same as in Figure 3. Note, that for the Ethier and Mount (1998) model the distributions of the noise in the AR(1) process driving the spike regime are plotted (*top right*).

Tematy

- ▶ Rynki energii w pigułce
- ▶ Przegląd modeli
- ▶ **Modele MRS drugiej generacji**
 - Przesunięte rozkłady pików
 - Heteroskedastyczne procesy opisujące stan bazowy
 - Zmienne w czasie prawdopodobieństwa przejścia
 - Testowanie jakości dopasowania



Modele MRS drugiej generacji

Dla cen i log-cen energii elektrycznej

- ▶ Wykorzystanie czynników fundamentalnych do lepszego modelowania pików cen:
 - [Mount et al. \(2006\)](#): model typu PS, tj. $2 \times \text{AR}(1)$, dla log-cen
 - Prawdopodobieństwa przejścia zależne od rezerwy systemowej
 - [Huisman \(2008\)](#): dwustanowy model typu IS dla log-cen
 - Prawdopodobieństwa przejścia zależne od temperatury
- ▶ Poprawa jakości dopasowania (*goodness-of-fit*):
 - [Weron \(2009\)](#): ceny, nie log-ceny
 - [Janczura & Weron \(2009, 2010\)](#):
 - Przesunięte o medianę rozkłady pików
 - Heteroskedastyczne procesy opisujące stan bazowy



Przesunięte rozkłady pików

- ▶ Rozkłady pików powinny nadawać zerowe prawdopodobieństwo obserwacjom poniżej pewnego kwantyla cen
- ▶ Niech $m = \text{mediana}(X_t)$

- Shifted log-normal (SLN), dla $x > m$

$$\log(X_{t,2} - m) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- Shifted Pareto (SP), dla $x > \lambda \geq m$

$$X_{t,2} \sim F_P(x; \alpha, \lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha$$

- ▶ Czy obcięcie na medianie (*median cutoff*) jest optymalne?
- Generalnie ... nie



Table 1: Goodness-of-fit statistics for 2-regime models with Vasicek, see eqns. (4)-(5), base regime dynamics and median-shifted lognormal or Pareto spike distributions. Models for prices are summarized in columns 2-7, for log-prices in columns 8-13. p -values of 0.05 or more are emphasized in bold.

Data	Prices						Log-prices					
	Simulation		LogL	K-S test p-value			Simulation		LogL	K-S test p-value		
	IQR	IDR		Base	Spike	Model	IQR	IDR		Base	Spike	Model
Shifted lognormal spikes												
EEX1	9%	11%	-4193.7	0.0012	0.4061	0.0032	30%	30%	403.0	0.0000	0.7371	0.0000
EEX2	13%	3%	-5066.9	0.0090	0.4732	0.0149	27%	16%	399.6	0.0000	0.6313	0.0000
PJM1	9%	-1%	-4385.9	0.0341	0.4346	0.0530	19%	8%	777.4	0.0007	0.3219	0.0012
PJM2	-3%	3%	-5012.1	0.0887	0.9196	0.0893	3%	6%	780.1	0.0747	0.4147	0.0696
NEP1	2%	2%	-4327.1	0.0247	0.5093	0.0561	9%	8%	610.4	0.0002	0.8316	0.0003
NEP2	0%	-2%	-4665.9	0.0823	0.8416	0.1251	8%	0%	1417.9	0.0088	0.7430	0.0170
Shifted Pareto spikes												
EEX1	7%	9%	-4218.6	0.0000	0.0000	0.0000	27%	27%	436.9	0.0000	0.0123	0.0000
EEX2	10%	1%	-5101.8	0.0188	0.0008	0.0412	26%	16%	374.6	0.0000	0.0166	0.0000
PJM1	8%	-5%	-4447.2	0.0500	0.0000	0.0500	20%	6%	755.2	0.0007	0.0000	0.0012
PJM2	0%	1%	-5161.6	0.0041	0.0000	0.0007	6%	7%	744.9	0.0262	0.3508	0.0147
NEP1	-2	-6%	-4366.1	0.0300	0.0000	0.0300	8%	3%	546.7	0.0001	0.0000	0.0003
NEP2	13%	0%	-4703.1	0.0230	0.0000	0.0097	9%	0%	1409.7	0.0024	0.0000	0.0083

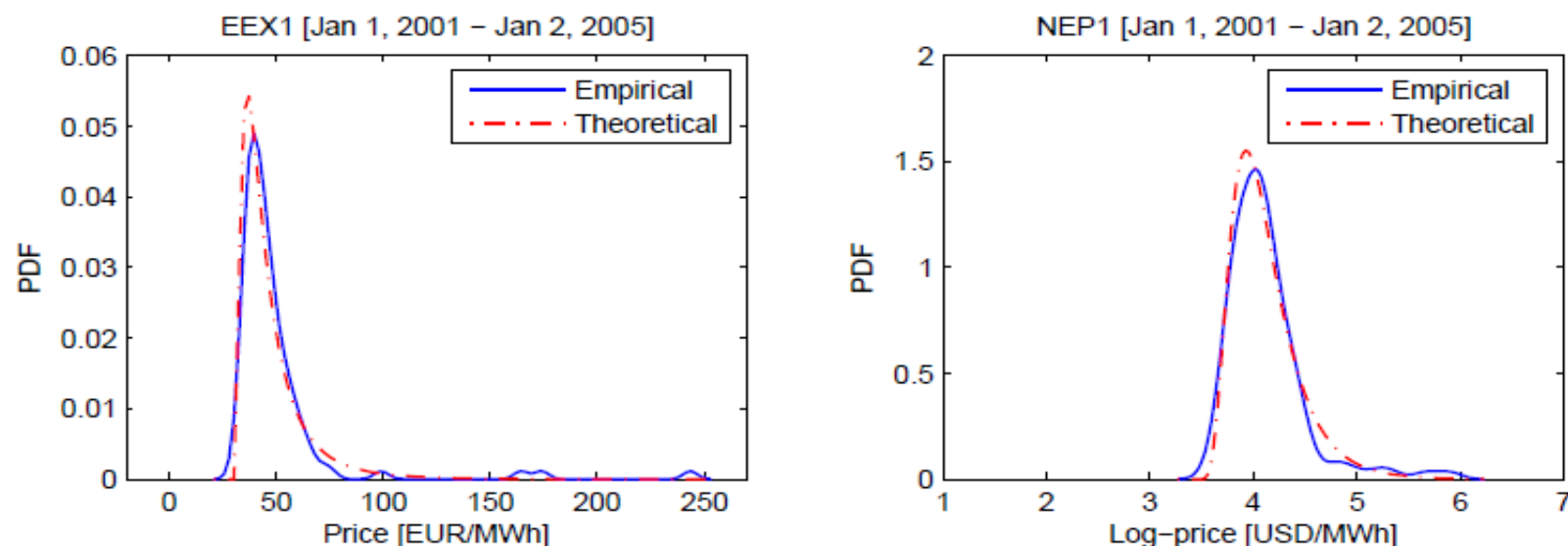


Figure 5: Comparison of empirical (sample) and theoretical (model implied) spike regime probability distribution functions in the 2-regime model with median-shifted lognormal spikes and Vasicek base regime dynamics. The fits are much better than for the models with non-shifted spike regime distributions, see Figure 4.

Przykład: Optymalizacja poziomu obciążenia

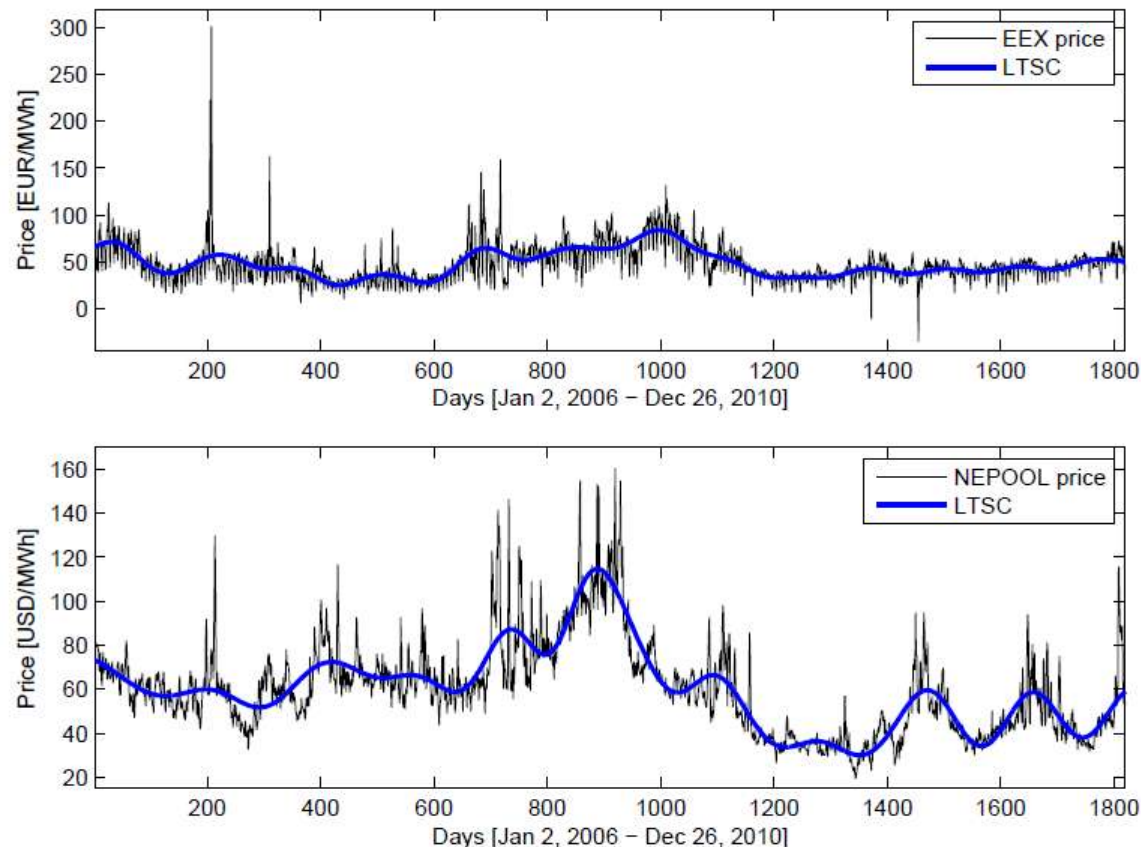
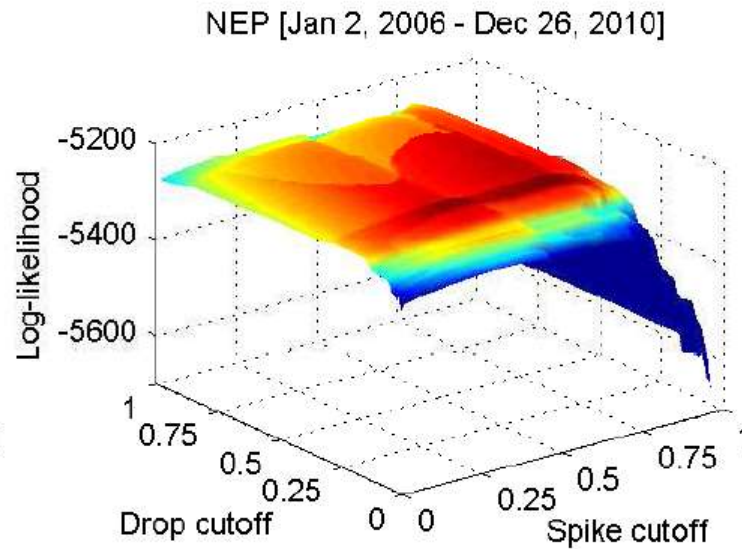
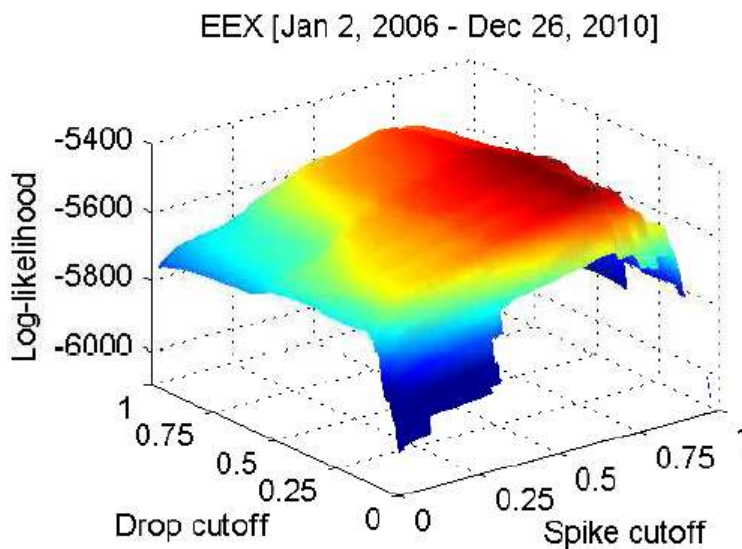


Fig. 3 Mean daily spot EEX (*top*) and NEPOOL (*bottom*) prices and the estimated long-term seasonal components (LTSC; thick blue lines).

Optymalizacja poziomu obcięcia cd.

- ▶ Koszt obliczeniowy nie jest bardzo duży
 - Zazwyczaj wystarczy wykonać mniej niż 100 estymacji aby znaleźć lokalne maksimum
- (standardowe ustawienia metody sympleksów w Matlabie)



Optymalizacja poziomu obcięcia cd.

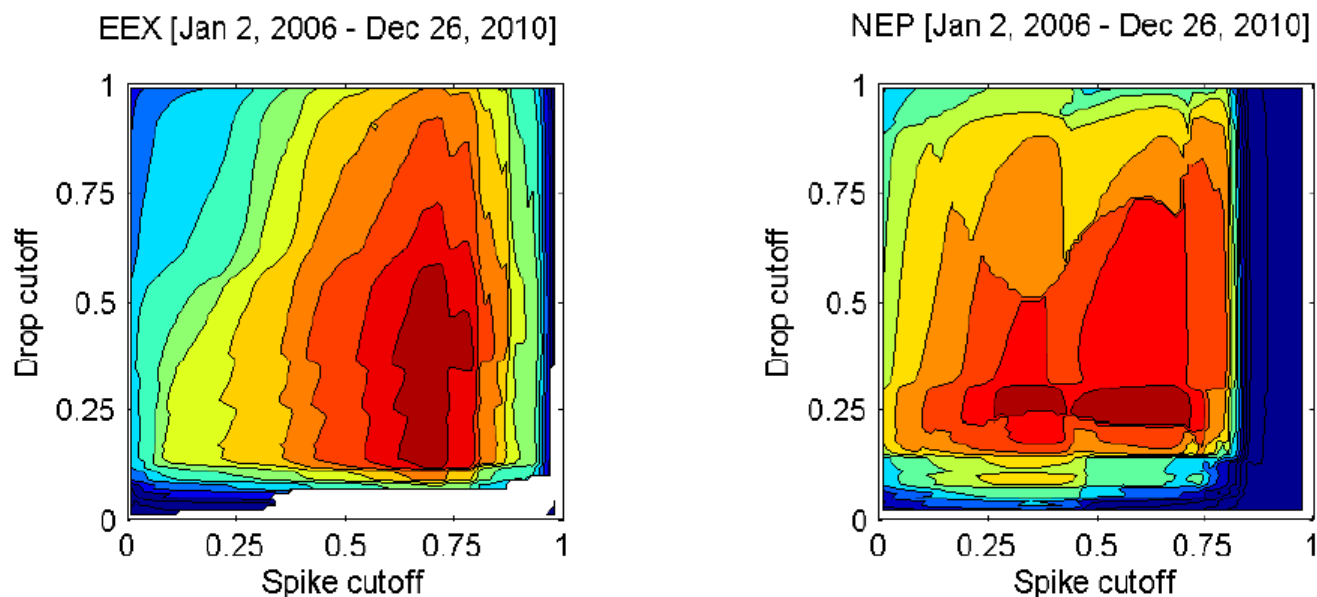


Fig. 6 Log-likelihoods of the best fitted models for each of the possible spike and drop regime cutoffs (0, 0.01, ..., 1) for EEX (*left panels*) and NEPOOL (*right panels*) deseasonalized daily

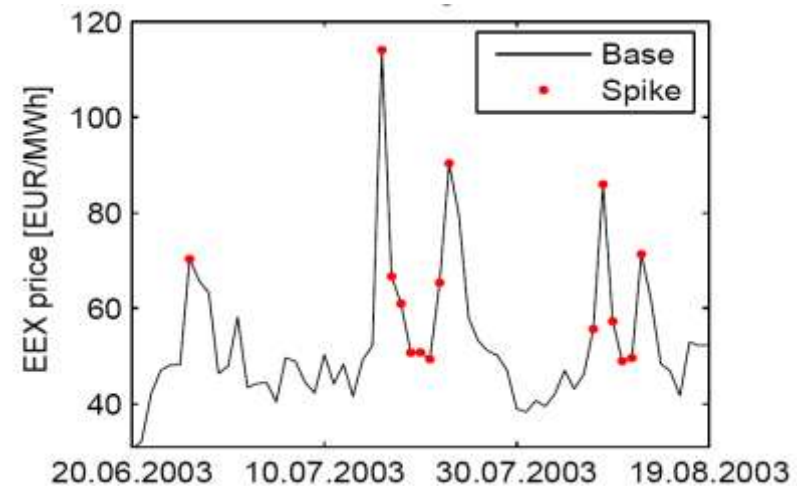
Optymalizacja poziomu obciążenia cd.

Table 2 Goodness-of-fit statistics for the MRS model with three independent regimes (25)-(27) fitted to the deseasonalized EEX and NEPOOL prices. For parameter estimates see Table 1.

Calibration scenario	K-S test p -values				LogL
	Base	Spike	Drop	Model	
EEX					
optimal (0.25%, 0.69%)	0.8433	0.3106	0.9323	0.5887	-5432.17
quartiles (0.25%, 0.75%)	0.8912	0.1940	0.7898	0.4370	-5459.58
median (0.5%, 0.5%)	0.8857	0.0156	0.2767	0.1355	-5492.59
NEPOOL					
optimal (0.24%, 0.65%)	0.1480	0.4556	0.9529	0.3690	-5222.08
quartiles (0.25%, 0.75%)	0.1159	0.3233	0.9655	0.2339	-5233.92
median (0.5%, 0.5%)	0.1925	0.7821	0.9195	0.2988	-5232.62

Heteroskedastyczny proces stanu bazowego

- ▶ Przesunięte rozkłady lepiej nadają się do modelowania pików
 - Ale ... pojawiają się skupiska 'normalnych' cen klasyfikowanych jako piki
 - Być może inna powinna być dynamika stanu bazowego?
- ▶ Wprowadźmy heteroskedastyczność ($\gamma \neq 0$)



$$X_{t,i} = \alpha_i + (1 - \beta_i)X_{t-1,i} + \sigma_i |X_{t-1,i}|^{\gamma_i} \epsilon_{t,i}$$

Vasicek a model heteroskedastyczny ($\gamma \neq 0$)

Table 2: Goodness-of-fit statistics for 2-regime models with heteroscedastic base regime dynamics and median-shifted lognormal spike distributions. Models for prices are summarized in columns 2-8, for log-prices in columns 9-15. p -values of 0.05 or more are emphasized in bold.

Data	Prices							Log-prices						
	γ	Simulation		LogL	K-S test p-value			γ	Simulation		LogL	K-S test p-value		
		IQR	IDR		Base	Spike	Model		IQR	IDR		Base	Spike	Model
					<i>Shifted lognormal spikes</i>									
EEX1	-0.43	0%	0%	-4169.3	0.0022	0.2365	0.0050	-4.08	22%	26%	625.5	0.0000	0.9865	0.0000
EEX2	-0.32	10%	2%	-5041.7	0.0125	0.2306	0.0276	-3.69	22%	12%	551.8	0.0000	0.5875	0.0000
PJM1	0.10	5%	1%	-4356.4	0.0853	0.5408	0.1607	-1.02	17%	6%	793.1	0.0006	0.1924	0.0011
PJM2	0.16	1%	-1%	-4989.3	0.5882	0.1802	0.5435	-0.01	1%	2%	804.2	0.0582	0.1843	0.0995
NEP1	0.22	2%	0%	-4326.3	0.0317	0.4754	0.0742	-1.35	9%	12%	643.1	0.0003	0.8524	0.0003
NEP2	0.62	0%	0%	-4654.0	0.0828	0.3566	0.0983	-2.37	1%	-1%	1445.2	0.0368	0.1724	0.0980

Efekt dźwigni ?!

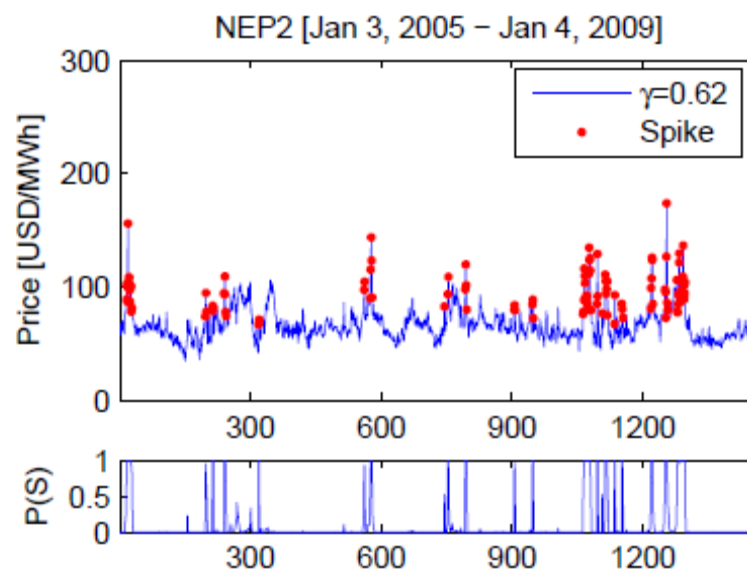
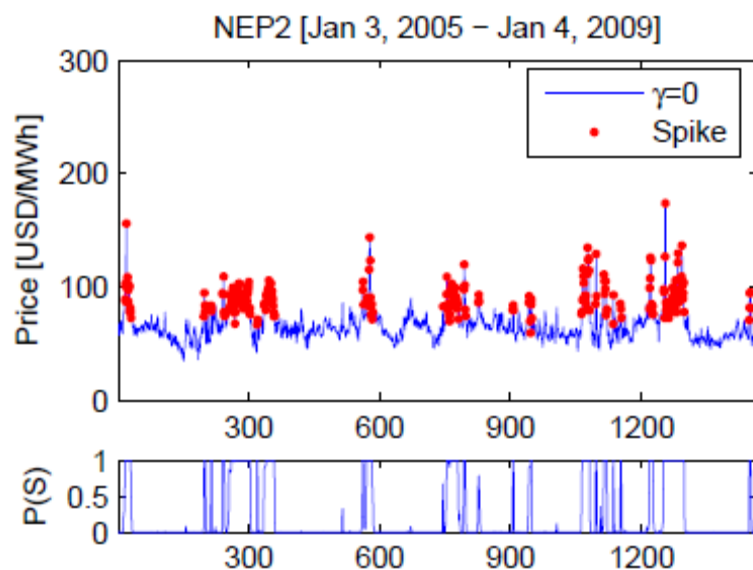
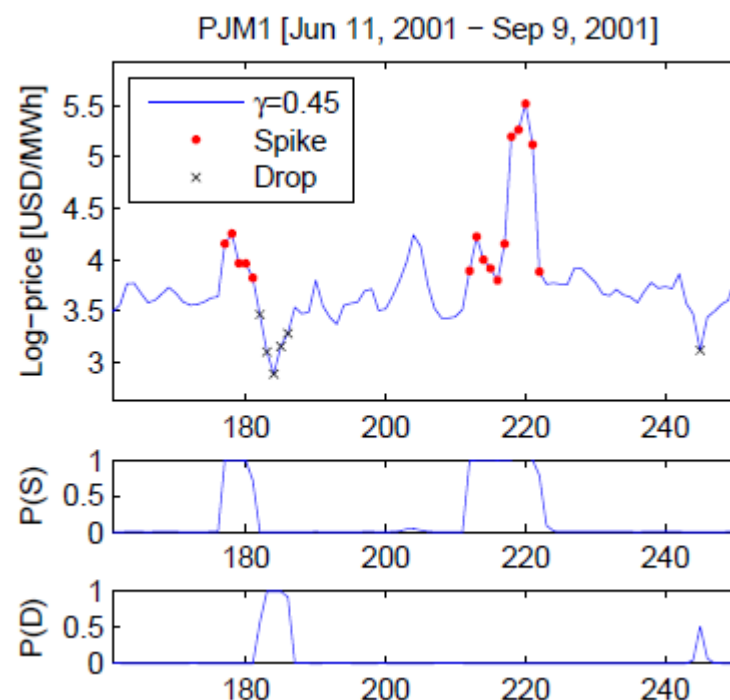


Figure 6: Sample calibration results for the 2-regime model with median-shifted lognormal spikes fitted to NEP2 prices. The difference between Vasicek (*left*) and heteroscedastic (*right*) base regime dynamics is clearly visible. Note, that due to the cutoff at the median, none of the price ‘drops’ are classified as spikes anymore.

Może jednak modele 3-stanowe?

- ▶ Wprowadźmy trzeci stan dla ‘spadków cen’
 - W przeciwieństwie do modelu Huisman & Mahieu (2003) cena **może pozostawać** w stanie wzbudzonym (piki, spadki)
 - Użyjmy ‘odbicia lustrzanego’ (czy też ‘odbitego’) rozkładu log-normalnego dla spadków

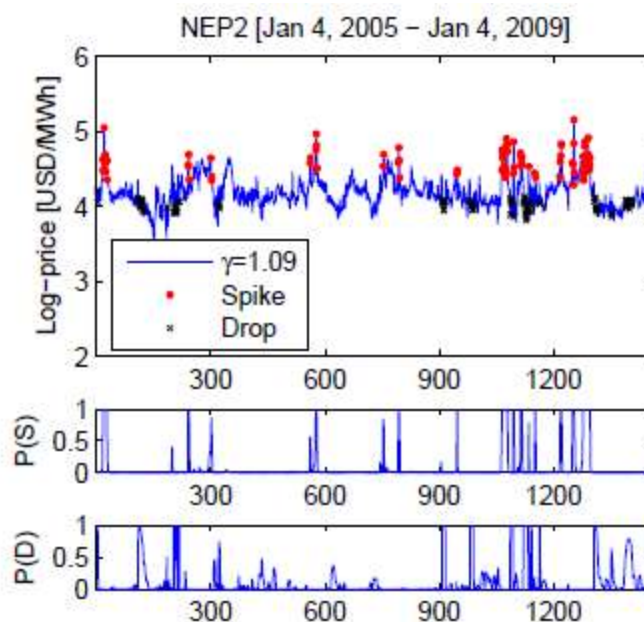
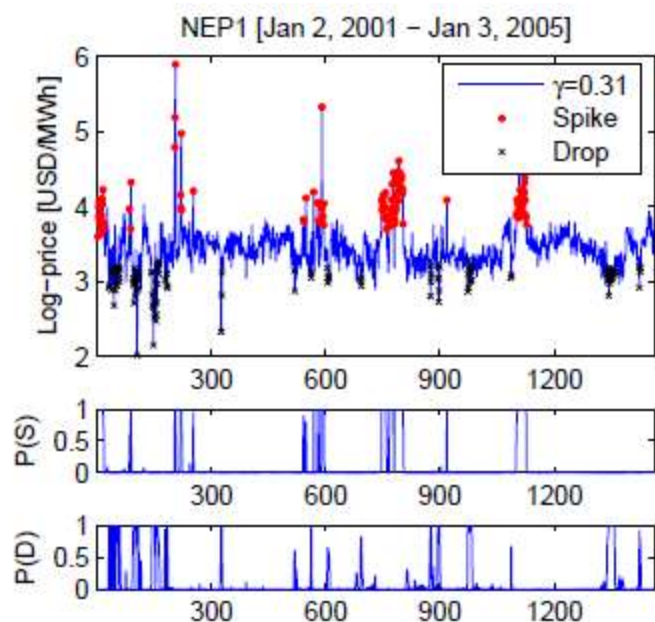


3-stanowe modele IS

Table 4: Goodness of fit statistics for the IS 3-regime models with heteroscedastic base regime dynamics and median-shifted lognormal spikes and drops. p -values of 0.05 or more are emphasized in bold.

Data	Simulation		LogL	K-S test p-values			
	IQR	IDR		Base	Spike	Drop	Model
Prices							
EEX1	-1%	3%	-3798.2	0.8371	0.0726	0.8576	0.5719
EEX2	5%	-1%	-4848.5	0.5510	0.2920	0.9196	0.3168
PJM1	2%	0%	-4153.9	0.3876	0.7052	0.7715	0.4072
PJM2	2%	0%	-4723.2	0.4824	0.3273	0.0244	0.4828
NEP1	0%	0%	-4266.6	0.0404	0.6121	0.9092	0.0609
NEP2	5%	0%	-4610.3	0.1359	0.7911	0.8771	0.1059

Data	Simulation		LogL	K-S test p-values			
	IQR	IDR		Base	Spike	Drop	Model
Log-prices							
EEX1	-2%	5%	1181.2	0.7297	0.3341	0.1971	0.5001
EEX2	7%	1%	944.6	0.2933	0.5090	0.5204	0.6517
PJM1	8%	1%	1002.9	0.3413	0.2726	0.9080	0.4640
PJM2	1%	2%	1030.2	0.2165	0.4604	0.2887	0.5258
NEP1	1%	2%	853.0	0.1084	0.8940	0.1948	0.1362
NEP2	6%	0%	1573.7	0.6858	0.7338	0.2334	0.8796



**Efekt
odwrotnej
dźwigni !**

Data	γ
<i>Prices</i>	
EEX1	0.6309
EEX2	0.3070
PJM1	0.6595
PJM2	0.1724
NEP1	0.5262
NEP2	0.0742
<i>Log-prices</i>	
EEX1	0.4102
EEX2	0.9115
PJM1	0.4481
PJM2	0.5057
NEP1	0.3068
NEP2	1.0923

Figure 9: Calibration results for the IS 3-regime models with heteroscedastic base regime dynamics and median-shifted lognormal spikes and drops fitted to log-prices.

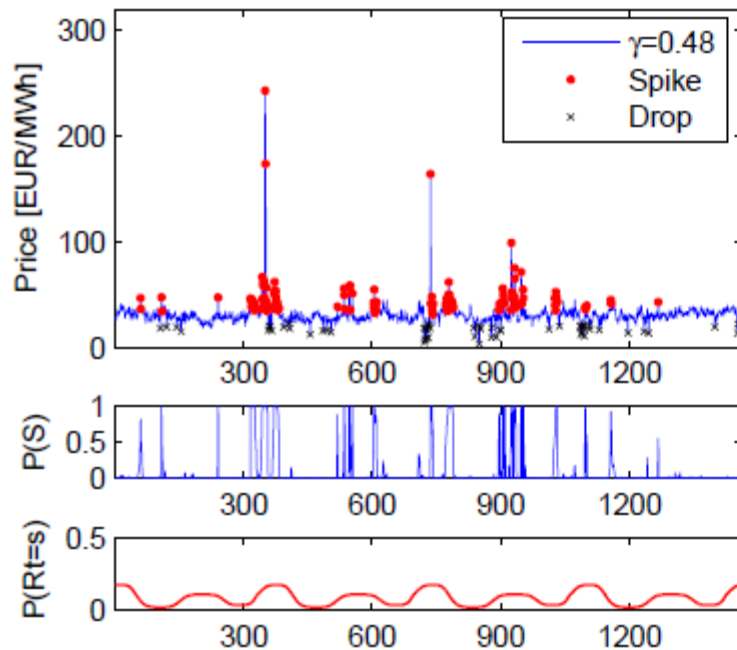
3-stanowe modele IS

Zmienne w czasie prawdopodobieństwa przejścia

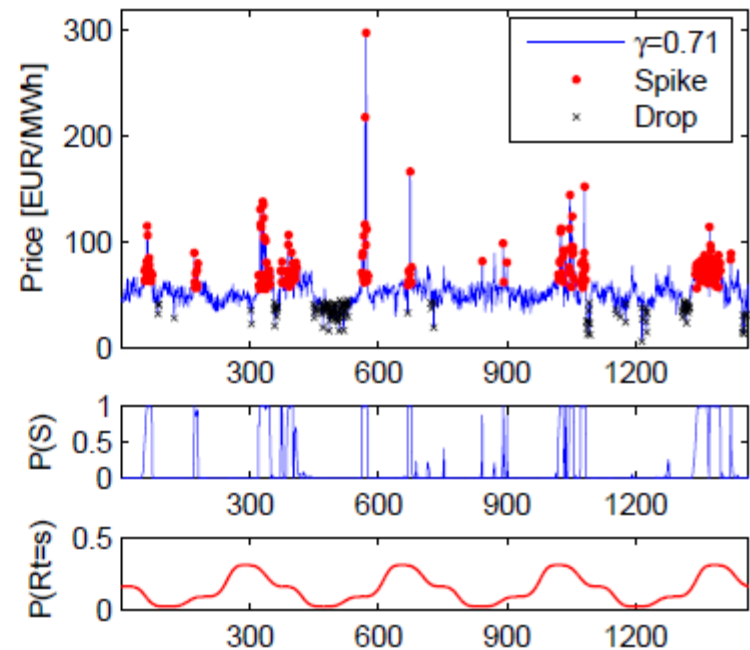
- ▶ Dopuszczymy macierz ze **zmiennymi w czasie (okresowymi) prawdopodobieństwami** $p_{ij}(t)$
- ▶ Estymowana dwuetapowo w kroku E algorytmu EM:
 - Prawdopodobieństwa są estymowane niezależnie dla każdej pory roku: zima (XII-II), wiosna (III-V), lato (VI-VIII) i jesień (IX-XI)
 - Później są wygładzane wykorzystując estymator jądrowy (z jądrem gaussowskim)
- ▶ Ta modyfikacja utrudnia testowanie zgodności
 - Tylko *p-values* dla poszczególnych stanów są podawane



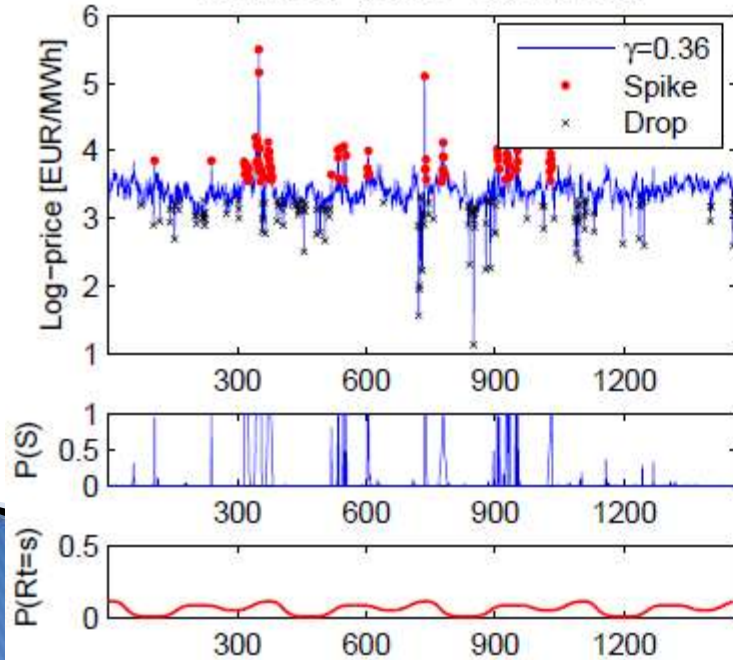
EEX1 [Jan 1, 2001 – Jan 2, 2005]



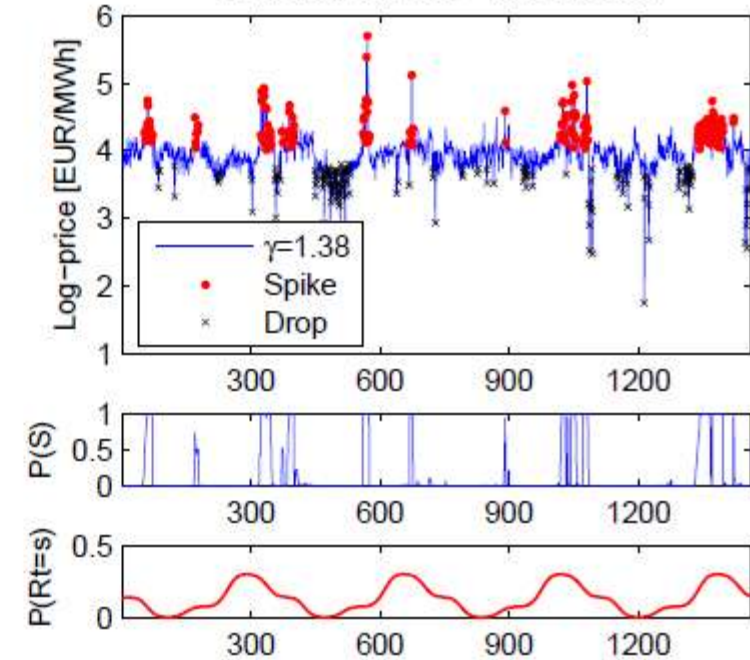
EEX2 [Jan 3, 2005 – Jan 4, 2009]



EEX1 [Jan 1, 2001 – Jan 2, 2005]



EEX2 [Jan 3, 2005 – Jan 4, 2009]



Prawdopodobieństwa przejścia:

stałe oraz okresowe

Data	Simulation		LogL	K-S test p-values		
	IQR	IDR		Base	Spike	Drop
Prices						
EEX1	-0%	-2%	-3896.2	0.9283	0.2444	0.5846
EEX2	-4%	-1%	-4839.5	0.1551	0.2536	0.8980
PJM1	-5%	-2%	-4215.9	0.1957	0.5965	0.3705
PJM2	-4%	-4%	-4879.7	0.0424	0.4312	0.1007
NEP1	0%	0%	-4211.1	0.0134	0.5258	0.7442
NEP2	-3%	-2%	-4566.5	0.2981	0.1140	0.4922
Log-prices						
EEX1	-1%	-3%	1132.7	0.6898	0.8781	0.0417
EEX2	-3%	0%	959.8	0.3952	0.3190	0.2340
PJM1	-2%	-3%	1018.7	0.3139	0.1204	0.8435
PJM2	-2%	-2%	904.2	0.1272	0.0953	0.3402
NEP1	0%	0%	863.6	0.1881	0.8957	0.7062
NEP2	-1%	-3%	1593.9	0.7883	0.1881	0.0409

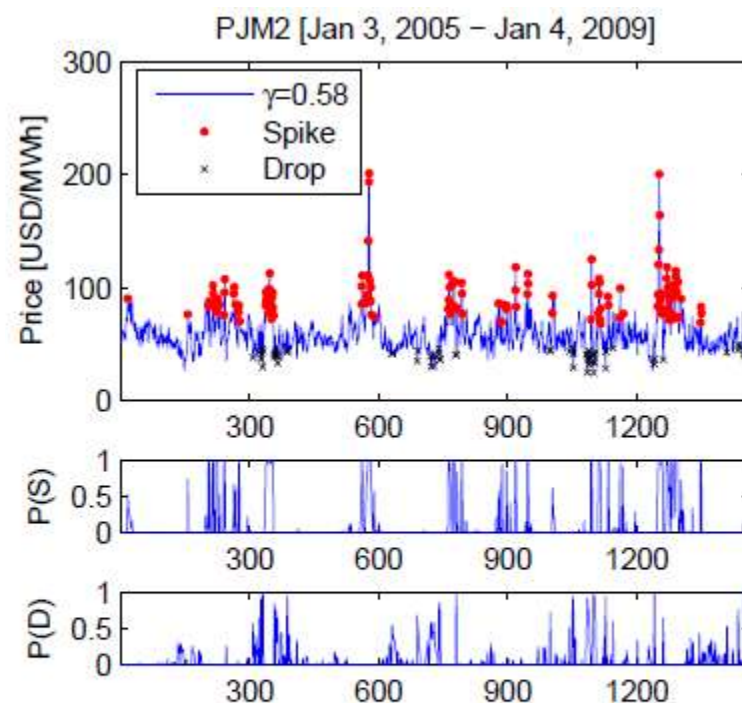


Figure 8: Comparison of calibration results for the IS 3-regime models with constant (*left*) and time-varying (*right*) transition probabilities. Note, the time-varying (periodic) intensity of spikes and price drops and the overall visually better fit of the latter model. The corresponding lower panels display the conditional probabilities $P(S) \equiv P(R_t = s | x_1, x_2, \dots, x_T)$ and $P(D) \equiv P(R_t = d | x_1, x_2, \dots, x_T)$ of being in the spike or drop regime, respectively.

Testowanie zgodności

(Goodness-of-fit)

- ▶ Testowanie zgodności dla modeli MRS nie jest oczywiste
- ▶ *Regime classification measure*: $RCM = 400 \times \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T p_t(1 - p_t)$
(Ang & Bekaert, 2002)
 - Bazuje na założeniu, że dobra klasyfikacja to taka, w której *smoothed inferences* (p_t) są bliskie 0 lub 1
 - Nie znamy rozkładu tej statystyki
 - Nie wiemy czy model pasuje do danych, jedynie czy p_t są bliskie 0 lub 1
- ▶ Możemy testować zgodność rozkładów brzegowych używając np. testu Kołmogorowa-Smirnowa (K-S)
 - Ale testu K-S nie można użyć bezpośrednio ...
 - W rozważanych modelach ceny, ich różnice czy zwroty nie są i.i.d.



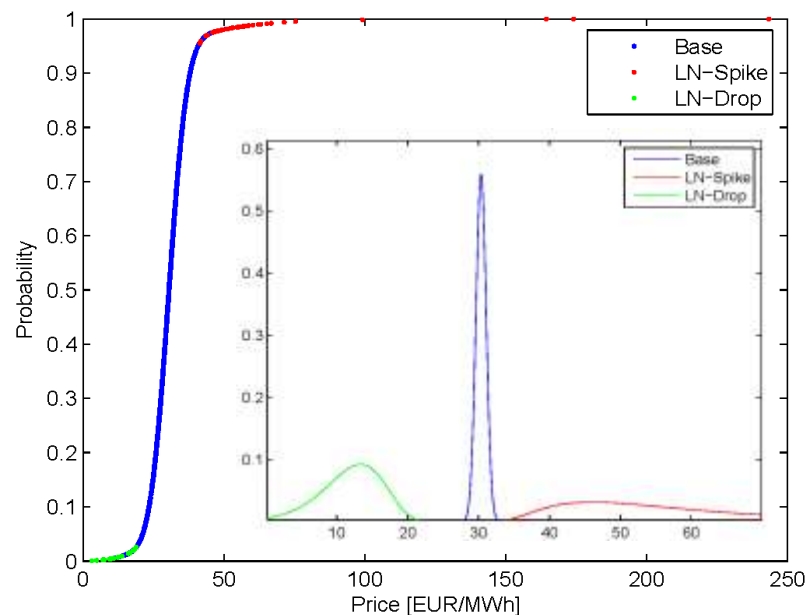
Procedura #1:

'Equally weighted edf (ewedf)'

- ▶ Dane są dzielone na 2 podzbiory (3 dla modelu 3-stanowego)
 - **Piki**, tj. obserwacje, dla których $P(R_t = 2) > 0.5$
 - Mają rozkład f_S , np. log-normalny czy Pareto
 - **Spadki**, tj. obserwacje, dla których $P(R_t = 3) > 0.5 \rightarrow f_D$
 - Residua stanu **bazowego**, tj. pozostałe obserwacje $\rightarrow N(0,1)$

$$\varepsilon_{t,1} = \frac{X_t - (1 - \beta_1 \Delta t)X_{t-\Delta t} - \alpha_1 \Delta t}{\sqrt{\Delta t} \sigma_1 |X_{t-\Delta t}| \eta}$$

- ▶ Stosujemy test K-S dla podzbiorów i łącznie dla całej próbki



Procedura #2:

'Weighted edf (wedf)'

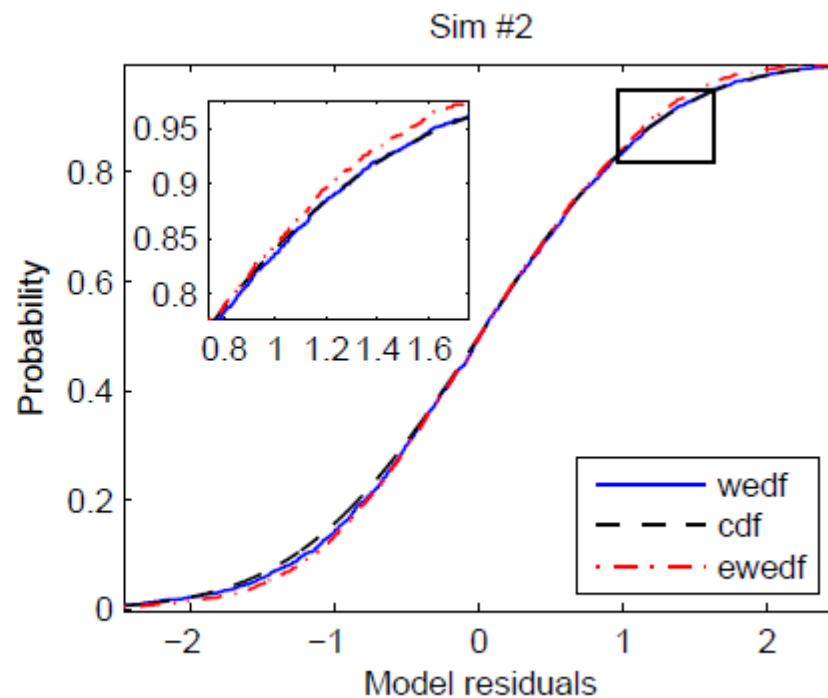
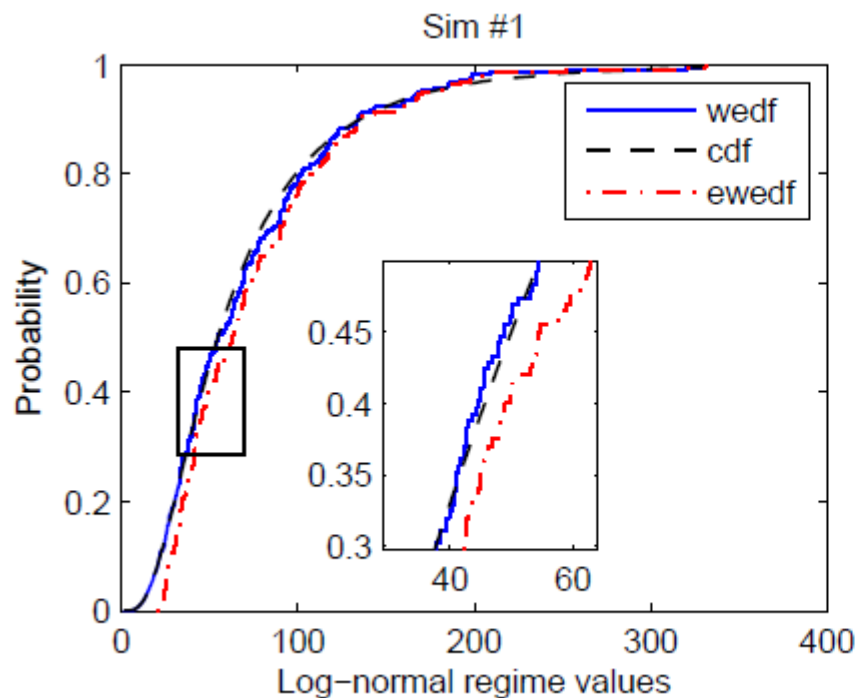
- ▶ Ważona dystrybuanta empiryczna (edf)

$$F_n^w(x) = \sum_{t=1}^n \frac{w_t \mathbb{I}_{\{y_t \leq x\}}}{\sum_{t=1}^n w_t}$$

- gdzie $w_t = P(R_t = i | x_1, x_2, \dots, x_T) = E(\mathbb{I}_{\{R_t=i\}} | x_1, x_2, \dots, x_T)$
- Nieobciążony i zgodny estymator $F(t)$
- Statystyka $D_n^w = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^w(x) - F(x)|$ zbiega (słabo) do rozkładu Kołmogorowa-Smirnowa
 - Dla $y_1=0 \rightarrow$ [Janczura & Weron \(2012\)](#)



Porównanie: ewedf oraz wedf



	Parameters						Probabilities	
	α_1	β_1	σ_1^2	α_2	β_2	σ_2^2	p_{11}	p_{22}
Sim #1	10.0	0.8	10.0	4.0	-	0.5	0.9	0.2
Sim #2	1.0	0.8	1.0	3.0	0.4	0.5	0.6	0.5

Wyznaczanie *p-values*

- ▶ Jeśli parametry są estymowane z danych, *p-values* mogą być przeszacowane
- ▶ Stephens (1978) zaproponował metodę '*half-sample*' ('połowa próbki')
 - Użyj połowy danych do estymacji parametrów, ale całego zbioru do testowania
 - Wyniki są zależne od wyboru 'połowy'
 - Nie ma możliwości zwiększenia dokładności
- ▶ Ross (2002) sugeruje użyć symulacji Monte Carlo ('*bootstrap*')



Wyznaczanie *p-values* cd.

- ▶ Procedura wyznaczająca *p-values*:
 - Parametry są estymowane dla próbki o rozmiarze $n \rightarrow \hat{\theta}$
 - Zakładając, że próbka ma rozkład $F(x; \hat{\theta})$ obliczana jest statystyka K-S (lub inna typu EDF) $\rightarrow d$
 - Symulujemy trajektorię rozmiaru n o 'rozkładzie $F(x; \hat{\theta})$ '
 - Estymujemy parametry $\rightarrow \hat{\theta}_1$
 - d_1 jest wyznaczane zakładając, że próbka ma rozkład brzegowy $F(x; \hat{\theta}_1)$
 - Powtarzamy procedurę 500, 1000, ... razy
 - *p-value* jest wyznaczane jako stosunek liczby razy gdy $d_i \geq d$ do wszystkich wygenerowanych trajektorii



Przykład: 2 czy 3 stany?

- ▶ NEPOOL – średnie dzienne ceny spotowe (*day-ahead*)
- ▶ 2 stycznia 2006 – 2 stycznia 2011 (1827 obserwacji)
- ▶ Rozpatrujemy dwa modele MRS dla odsezonowanych log-cen:

- 2-stanowy
$$\begin{cases} dX_{t,b} = (\alpha - \beta X_{t,b})dt + \sigma_b dW_t \\ \log(X_{t,s} - m) \sim N(\mu_s, \sigma_s^2) \end{cases}$$

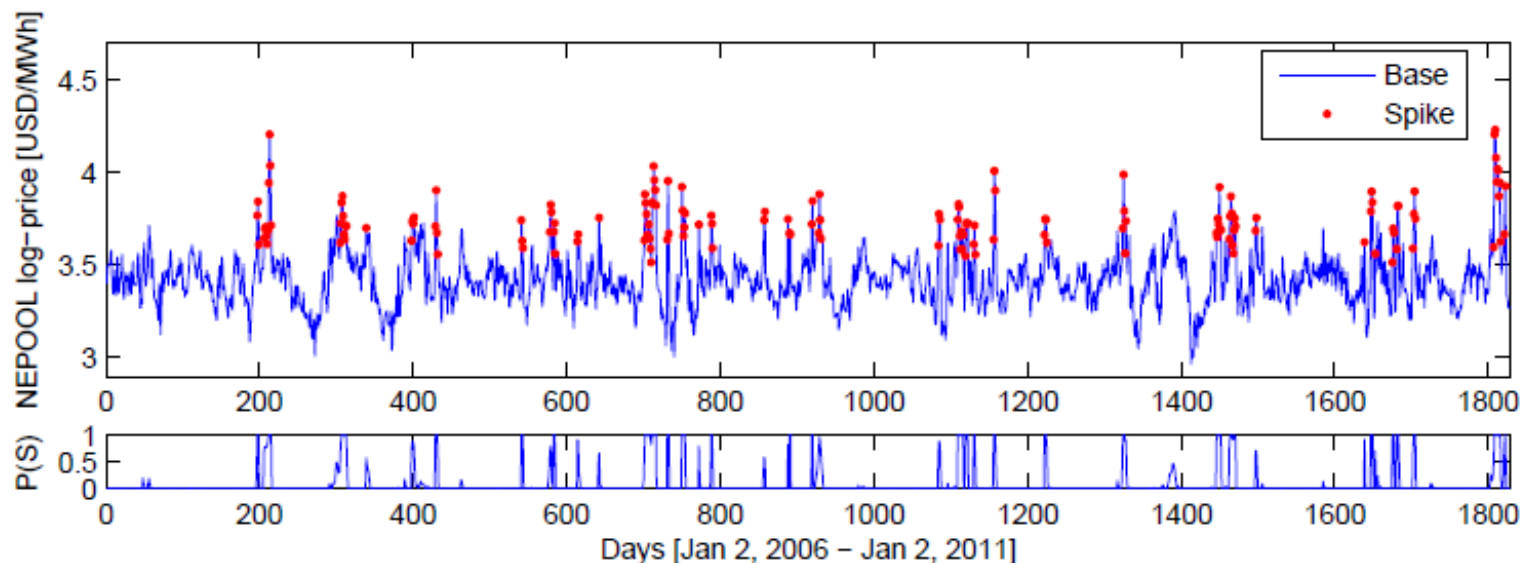
- 3-stanowy
$$\begin{cases} dX_{t,b} = (\alpha - \beta X_{t,b})dt + \sigma_b dW_t \\ \log(X_{t,s} - m) \sim N(\mu_s, \sigma_s^2), \quad X_{t,s} > m \\ \log(m - X_{t,d}) \sim N(\mu_d, \sigma_d^2), \quad X_{t,d} < m \end{cases}$$



Przykład cd.

► Model 2-stanowy

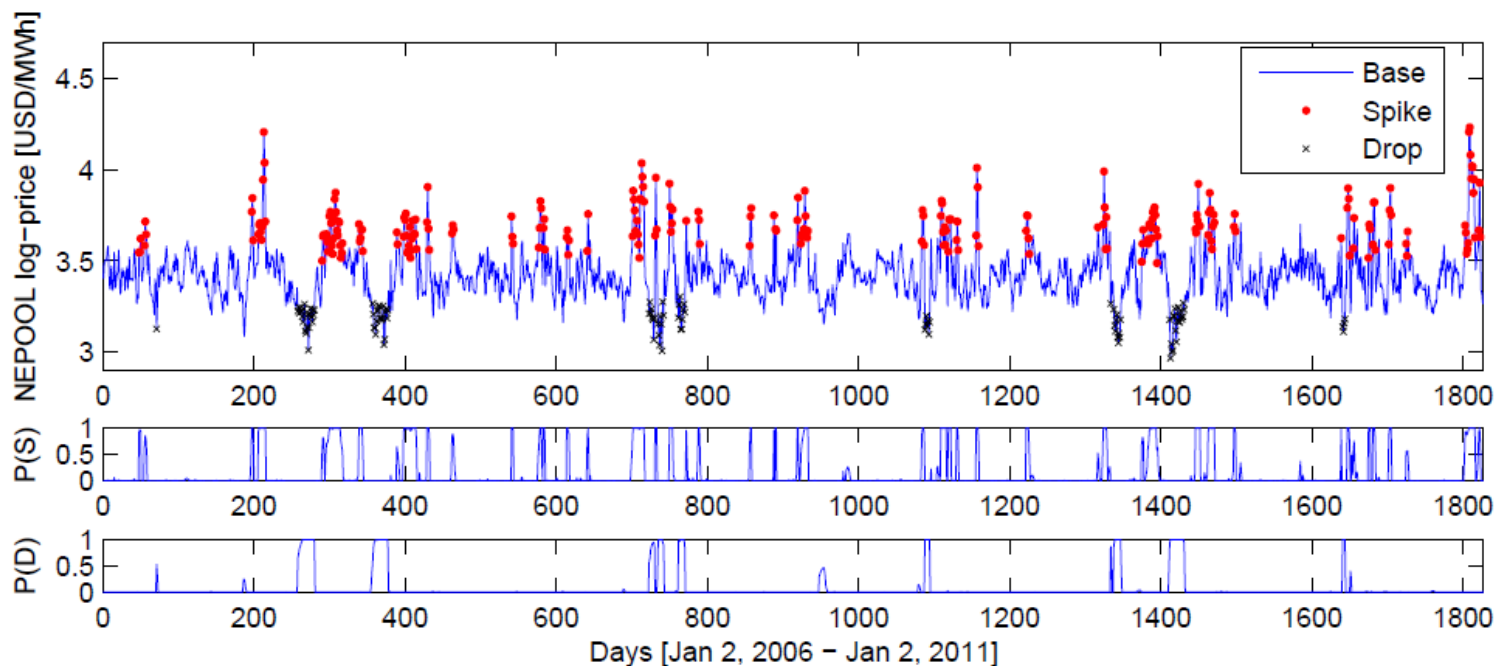
	ewedf				wedf			
Regime	Base	Spike	Drop	Model	Base	Spike	Drop	Model
<i>2-regime model</i>								
K-S test tables	0.21	0.27	-	0.12	0.08	0.93	-	0.10
MC simulations	0.01	0.07	-	0.01	0.00	0.57	-	0.00



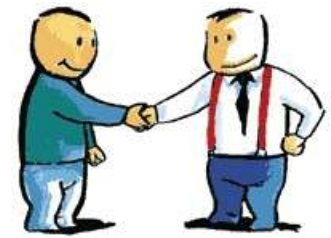
Przykład cd.

► Model 3-stanowy

	ewedf				wedf			
Regime	Base	Spike	Drop	Model	Base	Spike	Drop	Model
<i>3-regime model</i>								
K-S test tables	0.56	0.25	0.98	0.68	0.38	0.71	0.92	0.51
MC simulations	0.19	0.06	0.81	0.20	0.31	0.27	0.49	0.25



Wnioski



- ▶ To nie jest koniec poszukiwania modelu ...
 - Należy lepiej modelować pojawianie się pików
- ▶ **Diabeł** jest ukryty w ... **odsezonowaniu**
 - Może należy usunąć piki przed kalibracją komponent sezonowych (STSC i LTSC)?
 - Może należy użyć danych fundamentalnych aby lepiej modelować komponentę LTSC?

Dziękuję za uwagę i zapraszam



EFC12, Sydney, 12-14 Dec 2012



Literatura

- J. Janczura, R. Weron (2010) [An empirical comparison of alternate regime-switching models for electricity spot prices](#), Energy Economics 32, 1059-1073
- J. Janczura, R. Weron (2012) [Efficient estimation of Markov regime-switching models: An application to electricity spot prices](#), AStA, DOI 10.1007/s10182-011-0181-2
- J. Janczura, R. Weron (2012) [Goodness-of-fit testing for regime-switching models](#), Working Paper
- J. Nowotarski, J. Tomczyk, R. Weron (2011) [Wavelet-based modeling and forecasting of the seasonal component of spot electricity prices](#), Paper presented at EFC11
- S. Trück, R. Weron, R. Wolff (2007) [Outlier treatment and robust approaches for modeling electricity spot prices](#), Bulletin of the ISI 62, 1524 → nowa wersja w przygotowaniu (2012)

► Monografie

- F.E. Benth, J.S. Benth, S. Koekebakker (2008) *Stochastic Modeling of Electricity and Related Markets*, World Scientific
- M. Burger, B. Graeber, G. Schindlmayr (2007) *Managing Energy Risk*, Wiley
- A. Eydeland, K. Wolyniec (2003) *Energy and Power Risk Management*, Wiley
- R. Weron (2006) *Modeling and Forecasting Electricity Loads and Prices: A Statistical Approach*, Wiley

